Dr. Gerhard Baur
B.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Analysis II
Wintersemester 2011/12

Analysis II - Übungsblatt 6

(Abgabe: Mittwoch, 30. November 2011 vor der Übung.)

"Gauss actually won a Nobel Prize in Mathematics." - *www.gaussfacts.com*

Aufgabe 22 *(Kurve)* (8 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, t\sin\frac{1}{t})^T & , 0 < t \leq 1 \\ (0,0)^T & , t = 0 \end{cases}$$

eine Kurve beschreibt und weiter, dass $\gamma(t)$ nicht rektifizierbar ist.

Aufgabe 23 *(Kurvenlänge)* (3+3+4=10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie für festes $r > 0$ die Bogenlänge der folgenden Kurve (Schraubenlinie)

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix} \qquad \text{für } t \in [0, 4\pi].$$

(b) Bestimmen Sie die Bogenlänge der folgenden Kurve (Zykloid)

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \qquad \text{für } t \in [0, 2\pi].$$

(c) Im Endspiel am 01.07.2012 der Fußball-Europameisterschaft 2012 stehen sich erneut Spanien und Deutschland im Finale gegenüber. Nach 92 Minuten und einem spannenden Spiel steht es noch unentschieden. Der letzen Angriff von Thomas Müller wurde von Carles Puyol durch ein taktisches Foul gestoppt. Lukas Podolski tritt zum finalen Freistoß an und da er ein begabter Mathematiker ist, berechnet er die Flugbahn des Balles wie folgt

$$B : [0,2] \to \mathbb{R}^3,\ B(t) = \begin{pmatrix} 10t \\ t^2 \\ -2.5t^2 + 4t \end{pmatrix}.$$

Nach dieser Flugbahn landet der Ball genau im rechten Kreuzeck. Allerdings ist Podolski sich nicht sicher, ob der spanische Torwart Iker Casillas den Ball rechtzeitig erreicht. Er nimmt an, dass Casillas eine Sekunde benötigt, um seine Hand ins rechte Kreuzeck zu stecken. Zudem tritt Podolski den Ball mit 108 km/h. Der Freistoß ist die letzte Aktion des Spiels. Wird Deutschland Europameister?
(Hinweis: Zur Lösung dürfen Sie Formeln für $\int \sqrt{ax^2 + bx + c}dx$ benutzen, siehe z.B. Bronstein.)

Aufgabe 24 *(Potenzreihenentwicklung von Arsinh)* (10 Punkte)

Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \text{Arsinh}x$$

in eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $a = 0$.
Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 0.3.

Aufgabe 25 *(Erzeugende Funktionen)* (12 Punkte)

Gegeben sei die Drei-Term-Rekursion

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \qquad , n \geq 3 \quad \text{mit den Startwerten } a_1 = 1, a_2 = 5.$$

Um eine explizite Darstellung von a_n zu finden, kann man die Methode der erzeugenden Funktionen verwenden. Man setzt

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_n z^n,$$

wobei f die erzeugende Funktion der Folge (a_n) heißt und leitet eine Identität, in diesem Falle

$$f(z) = \frac{z}{6z^2 - 5z + 1}$$

her. Anschließend entwickelt man $f(z)$ in eine Potenzreihe um 0, etwa $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ und erhält eine explizite Formel für a_n durch Koeffizientenvergleich von $a_n = b_n$. Führen Sie die Methode der erzeugenden Funktionen um eine explizite Darstellung der a_n für obige Drei-Term-Rekursion zu erhalten durch.