Dr. Gerhard Baur
Manuel Bernhard
Wintersemester 2011/2012

Übungsblatt 4

Lineare Algebra für Informatiker und Ingenieure

(Abgabe ist zu **zweit** am 21.11.2011 um 12:10 Uhr in H22 **vor** der Übung)

Lösungen bitte in **Reinschrift** und **getackert** abgeben.
Man denke daran, dass man im **SLC registiert** und zur **Vorlesung angemeldet** sein muss, damit Punkte eingetragen werden können.

Aufgabe 1 (*Lote auf Ebenen*) (4)

Gegeben sei eine Ebene E, welche durch die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

geht. Weiter sei der Punkt

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Es sei g das Lot von P auf E. Das bedeutet, dass $g \perp E$ ist und $P \in g$ gilt. Man bestimme den Lotfußpunkt, also den Schnittpunkt von g und E.

Aufgabe 2 (*Erste Aufgabe zur Mengenlehre*) (2+2+2+2)

(a) Man bestimme $O \cap G$, $O \backslash B$, $B \backslash O$, $\mathcal{P}(O), O \times G, G \times O$ und die symmetrische Differenz $G \triangle B := G \backslash B \cup B \backslash G$ für

$$O = \{\text{roter Apfel}, \text{faulige Birne}, \text{Wassermelone}, \text{unreife Banane}\} \ \ \text{(Obst)}$$
$$B = \{\text{unreife Banane}, \text{eingelegte Gewürzgurke}, \text{Tomate}, \text{Wassermelone}, \text{Stachelbeere}\} \ \ \text{(Beeren)}$$
$$G = \{\text{eingelegte Gewürzgurke}, \text{Brotfrucht}, \text{Tomate}, \text{Gemüsespargel}, \text{Wassermelone}\} \ \ \text{(Gemüse)},$$

indem man die Mengen explizit angibt.

(b) Man gebe für jede der folgenden Mengen die Anzahl ihrer Elemente an

$$A = \emptyset, \quad B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, 1\}, 2\}, \quad C = \{\emptyset\}, \quad D = \{1, 2\} \quad \text{und} \quad E = \{1, B, 2\}.$$

Man gebe weiter alle gültigen Teilmengen- und Elementbeziehungen zwischen obigen Mengen an.

(c) Gegeben seien die Mengen

$$\mathcal{A} = \{\{z \in \mathbb{C} : \ |z + i| = \alpha |z - i|\} : \ -1 < \alpha < 1\}$$
$$\mathcal{B} = \{\{z \in \mathbb{C} : \ |z + i| \geq \alpha |z - i|\} : \ \alpha \geq 1\}$$

bestehend aus Teilmengen von $\mathbb{C}$. Man gebe für die Mengen

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A, \quad \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A, \quad \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \quad \text{und} \quad \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$$

einfache Darstellungen an (Hier müssen Sie die Lösung nur angeben, nicht nachweisen).

Bitte wenden!

(d) Man beweise die Gleichheit der folgenden Mengen

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, z + 2w = 1 \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, \exists \lambda \in \mathbb{C} : \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 3 (*Einfache Aussagen über Mengen*) (2+2+2+2)

Im Folgenden seien A, B, A_1, A_2, A_3, A_4 Teilmengen von X und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Menge von Teilmengen von X. Man verifiziere folgende Aussagen.

(a) Es gilt $(A_1 \cap A_2) \cup A_3 = (A_1 \cup A_3) \cap (A_2 \cup A_3)$.

(b) Im Allgemeinen gilt $(A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4) = (A_1 \cup A_3) \cap (A_2 \cup A_4)$ **nicht**.

(c) Es gilt $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ und allgemeiner

$$\left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \right)^C = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^C.$$

(d) Es sind $A \backslash B$, $B \backslash A$ und $A \cap B$ paarweise disjunkt und es gilt

$$(A \backslash B) + (B \backslash A) + (A \cap B) = A \cup B.$$