Dr. Gerhard Baur
Manuel Bernhard
Wintersemester 2011/2012

Übungsblatt 5

Lineare Algebra für Informatiker und Ingenieure

(Abgabe ist zu **zweit** am 28.11.2011 um 12:10 Uhr in H22 **vor** der Übung)

Aufgabe 1 (*Schnittoperationen unter Funktionen*) (1+1+1)

Es sei $f : A \to B$ eine Funktion, sowie $B_1, B_2 \subset B$ und $A_1, A_2 \subset A$.

(a) Man zeige, dass
$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$
gilt.

(b) Man beweise, dass
$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$$
gilt.

(c) Man zeige, dass in Teil (b) die Gleichheit i.A. nicht gilt. Man gebe dazu ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 2 (3)

Es seien $g : A \to B$ und $f : B \to C$ bijektive Funktionen. Man beweise, dass auch $f \circ g : A \to C$ bijektiv ist und
$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$
gilt.

Aufgabe 3 (*Eine einfache Äquivalenzrelation*) (2)

Wir definieren auf $\mathbb{Z}$ eine Relation $\sim$ über
$$a \sim b :\Leftrightarrow a - b \text{ durch 5 teilbar} :\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \; a - b = 5k.$$
Man zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist und gebe die Äquivalenzklassen, sowie ein Repräsentantensystem an.

Aufgabe 4 (*Satz 4.3' aus der Vorlesung*) (3)

Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Weiter seien $a, b \in G$, dann hat die Gleichung $x \circ a = b$ genau eine Lösung $x \in G$. Diese ist gegeben durch $x = b \circ a^{-1}$.

Aufgabe 5 (*Gruppen*) (7+2)

(a) Man prüfe, ob $(G, \circ)$ eine Gruppe ist.

i. $G = \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $n \circ m = n \cdot m$.

ii. $G = \{0, 1\}$ und $0 \circ 1 = 1 \circ 0 = 1$, sowie $1 \circ 1 = 0 \circ 0 = 0$.

iii. $G = \mathbb{R}^3$ und $a \circ b = a \cdot b$ (Skalarprodukt).

iv. $G = \mathbb{Z}$ und $n \circ m = n - m$.

v. $G = \{x \in \mathbb{R} : \; x > 1\}$ und $a \circ b = ab - a - b + 2$.

(b) Es sei A eine Menge, dann verifiziere man, dass $(\mathcal{P}(A), \triangle)$ eine abelsche Gruppe ist (Das Assoziativgesetz müssen Sie nicht zeigen!).

Zusatz: Man finde weiter alle Lösungen der Gleichung
$$\{2, 4, 6, 8, 10\} \triangle X = \{3, 6, 9\}$$
für eine Menge X.