Dr. Gerhard Baur
Manuel Bernhard
Wintersemester 2011/2012

Übungsblatt 6

Lineare Algebra für Informatiker und Ingenieure

(Abgabe ist zu **zweit** am 5.12.2011 um 12:10 Uhr in H22 **vor** der Übung)

Weil nicht jeder in der entsprechenden Zeit seine Blätter findet bzw. dies zu viel Zeit in Anspruch nimmt, sollen in Zukunft die Blätter im Tutorium verteilt werden. Bitte schreiben Sie ab jetzt den **Namen ihres Tutors oder der Tutorin** auf die Abgabe! Blätter ohne die Angabe einer Turorin oder eines Tutors können beim Übungsleiter abgeholt werden.
Bitte geben Sie die Lösungen zu den Aufgaben in der **richtigen Reihenfolge** ab! Man sollte die Aufgaben nicht suchen müssen.

Aufgabe 1 (*Permutationen*) (2+1+1+2+2)
Es seien folgende Permutationen aus S_5 gegeben

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Man berechne $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$, τ^{-1}, σ^{-1}, $(\sigma \circ \tau)^{-1}$ und $\tau^{-1} \circ \sigma^{-1}$.
(b) Man löse die Gleichungen $\sigma \circ x = \tau$ und $y \circ \sigma = \tau$ für $x, y \in S_5$.
(c) Man gebe für τ die Zahl der Inversionen an.
(d) Man schreibe σ als Produkt von Transpositionen.
(e) Man berechne $\operatorname{sign} \sigma$, $\operatorname{sign} \tau$, $\operatorname{sign}\left(\tau^{-1}\right)$ und $\operatorname{sign}\left(\sigma^{-1} \circ \tau\right)$.

Aufgabe 2 (*Leibniz-Formel für die* 3*-reihige Determinante*) (2)
Die 3-reihige Determinante

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

lässt sich als Summe der 6 Ausdrücke

$$\operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdot a_{\sigma(3),3}$$

für $\sigma \in S_3$ schreiben. Mit anderen Worten gilt

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdot a_{\sigma(3),3}.$$

Man verifiziere dies!

Aufgabe 3 (*Ringe und Körper - Einfache Theorieaufgaben*) (2+3)
Man verifiziere folgende Aussagen.
(a) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Man beweise, dass

$$c(a - b) = ca - cb$$

für alle $a, b, c \in R$ gilt.

Bitte wenden!

(b) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $a \in K$ und $b, c, d \in K \backslash \{0\}$. Man zeige, dass

$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}$$

gilt und beide Ausdrücke wohldefiniert sind.

Aufgabe 4 (*Der Körper mit* 4 *Elementen*) (5)

Man kann zeigen, dass es einen Körper $(K, +, \cdot)$ mit 4 Elementen gibt. Für uns besteht K aus den Elementen

$K = \{$ ❄, ☼, ////, ⚡ $\}$.

Die folgenden Verknüpfungstabellen sind unvollständig.

+	❄	☼	////	⚡
❄				
☼		////		
////				
⚡				

$\cdot$	❄	☼	////	⚡
❄				
☼		☼		
////			////	
⚡				

Man fülle die Tabellen so aus, dass sich ein Körper ergibt (dies geht nur auf eine Weise!). Begründen Sie die Wahlen der Tabelleneinträge. Sie müssen anschließend **nicht** zeigen, dass dies tatsächlich einen Körper definiert.