Dr. Gerhard Baur
Manuel Bernhard
Wintersemester 2011/2012

Übungsblatt 8

Lineare Algebra für Informatiker und Ingenieure

(Abgabe ist zu **zweit** am 19.12.2011 um 12:10 Uhr in H22 **vor** der Übung)

Aufgabe 1 (*Lineare Unabhängigkeit in verschiedenen Vektorräumen*) (1+1+1+1+1)
Welche der folgenden Vektoren sind im Vektorraum $(V, K, +, \cdot)$ linear unabhängig?

(a) $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}1\\5\\-1\end{pmatrix}$ aus $V = \mathbb{R}^3$ mit $K = \mathbb{R}$.

(b) $w_1 = \begin{pmatrix}1+i\\0\\1\end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix}2\\0\\1-i\end{pmatrix}$ über $V = \mathbb{C}^3$ mit $K = \mathbb{C}$.

(c) w_1, w_2 und w_3 aus Teil (b) mit $V = \mathbb{C}^3$ und $K = \mathbb{R}$.

(d) v_1, v_2 und v_3 aus Teil (a) in $V = \mathbb{Z}_5^3$ über $K = \mathbb{Z}_5$.

(e) $u_1 = \sin x$, $u_2 = e^x$ und $u_3 = x^2 + 1$ aus $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ über $K = \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (*Nochmal Lineare Unabhängigkeit*) (2+3)
Es sei $(V, K, +, \cdot)$ ein Vektorraum und es seien $u, v, w \in V$ linear unabhängig.

(a) Man zeige, dass auch

$$w + u,\ 5v + 3w + u \text{ und } v + 2w + 4u$$

linear unabhängig sind, falls $K = \mathbb{R}$ ist.

(b) Für welche Primzahlen p ist die Aussage aus (a) auch für $K = \mathbb{Z}_p$ richtig?

Aufgabe 3 (*Beweis oder Gegenbeispiel*) (1+1+1)
Es sei $(V, K, +, \cdot)$ ein Vektorraum. Man beweise oder widerlege folgende Aussagen:

(a) Sind v_i, v_j für $i \neq j$ (und $i, j \in \{1, ..., n\}$) **paarweise** linear unabhängige Vektoren aus V, so sind $v_1, ..., v_n$ linear unabhängig.

(b) Es seien drei Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in V$ gegeben, welche sich als Linearkombinationen von zwei Vektoren w_1, w_2 schreiben lassen. Dann sind v_1, v_2, v_3 linear abhängig.

(c) Es seien $v_1, ..., v_n \in V$ und es gebe $i \neq j$ aus $\{1, ..., n\}$ mit $v_i = v_j$. Dann sind $v_1, ..., v_n$ linear abhängig.

Aufgabe 4 (*Austauschsatz von Steinitz*) (1+1+2)
Es seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$$

aus dem $\mathbb{R}^3$ (aufgefasst als $\mathbb{R}$-Vektorraum) gegeben.

(a) Man zeige, dass v_1, v_2, v_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet.

Bitte wenden!

(b) Man überprüfe die Voraussetzungen für den Austauschsatz von Steinitz für die Basis v_1, v_2, v_3 und die Vektoren w_1, w_2.

(c) Man tausche 2 der Vektoren v_1, v_2, v_3 mit w_1 und w_2 aus. Man gebe also explizit eine im Austauschsatz von Steinitz behauptete Basis an (Der Nachweis, dass dies wieder eine Basis ist, gehört zur Aufgabe!).

Aufgabe 5 (*Eine erste Dimensionsbestimmung*) (3)

Es sei $V = \mathbb{C}^n$ im Sinne von Blatt 7 Aufgabe 4 (b) als $\mathbb{R}$-Vektorraum aufgefasst. Man bestimme nun die Dimension $\dim_{\mathbb{R}} V$ von $V = \mathbb{C}^n$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Netter Fakt am Rande: In manchen Fällen ist die Lineare Unabhängigkeit sehr schwer zu beweisen (und teilweise nur eine unbewiesene Vermutung). Betrachten wir zum Beispiel den Vektorraum $\mathbb{R}$ über dem Körper $\mathbb{Q}$.

Ein Spezialfall des Satzes von Lindemann-Weierstraß ist, dass die Vektoren e^z mit $z \in \mathbb{Z}$ (also die Vektoren ..., e^{-3}, e^{-2}, e^{-1}, e^0, e^1, e^2, ...) im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind. Dies (und insbesondere der Satz von Lindemann-Weierstraß) ist aber ein nicht triviales Resultat!