Dr. Gerhard Baur
Manuel Bernhard
Wintersemester 2011/2012

Übungsblatt 10

Lineare Algebra für Informatiker und Ingenieure

(Abgabe ist zu **zweit** am 16.1.2012 um 12:10 Uhr in H22 **vor** der Übung)

Aufgabe 1 (*Schnitte und Summen von Vektorräumen - revisited*) (2+1+1+1)
Wir betrachten den Vektorraum Π der reellen Polynome. Gegeben seien die Unterräume

$$U_1 = \mathcal{LH}\left(1 + x + x^3, x^6 - 2x^4 - 7, x^4 + x^2 + 2, x^6 + 2x^2 - 3, x^6 - 2x^4 + 7x^3 + 7x\right),$$

$$U_2 = \mathcal{LH}\left(1 + x, (1 + x)^4, x^4 + 3x^3 + 6x^2, (1 + x)^2\right).$$

(a) Man gebe alle möglichen Polynome an, welche eine Basis von U_1 bilden und unter den Polynomen vorkommen, aus denen die lineare Hülle gebildet wurde.
(b) Man bestimme eine Basis von U_2.
(c) Man gebe eine Basis von $U_1 + U_2$ an.
(d) Man berechne die Dimension von $U_1 \cap U_2$.

Aufgabe 2 (*Rang und Kern einer Matrix*) (4+1+1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 11 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & 2\alpha & 3+\alpha & 0 \\ -1 & 0 & 2-\alpha & \alpha - 2 \end{pmatrix}$$

(a) Man bestimme $\operatorname{rg} A$ und $\operatorname{rg} B$ (in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$).
(b) Man bestimme eine Basis von $\ker A$.
(c) Man gebe eine Basis für den Unterraum

$$U = \left\{ b \in \mathbb{R}^5 : \ A^T x = b \text{ ist lösbar} \right\}$$

an.

Aufgabe 3 (*Lösen von linearen Gleichungssystemen*) (2+2+2)
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2\alpha & 4 & \alpha + 1 \\ \alpha & 2 & 1 \\ -\alpha & 1 & -3\alpha \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Man berechne die Lösungen von $Ax = b$.
(b) Man berechne die Lösungsmenge von $By = c$ in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.
(c) Man berechne für $\alpha = 1$ alle Lösungen der Gleichung $Ax + By = b + c$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (*Matrixgleichung*) (3)

Es sei $A \in K^{k,l}$ und $B \in K^{k,m}$. Wann ist die Matrixgleichung

$$AX = B$$

für beliebiges B eindeutig lösbar (k, l, m sind beliebige aber feste natürliche Zahlen)? Wann gibt es also für jede Matrix $B \in K^{k,m}$ genau eine Matrix $X \in K^{l,m}$, welche die Gleichung löst?

Aufgabe 5 (*Google - PageRank*) (1*+1*+1*)

Wir wollen etwas die Grundidee eines Algorithmus an einem Beispiel verstehen, welcher von Larry Page und Sergei Brin entwickelt und patentiert wurde.

Gegeben sei ein Netz aus N Seiten. Es verlinke die i-te Seite auf genau L_i andere Seiten. Wir betrachten die Matrix

$$B = (b_{ij}) \text{ mit } b_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{L_i} & \text{, falls die Seite } i \text{ auf die Seite } j \text{ verlinkt.} \\ \frac{1}{N} & \text{, falls } L_i = 0 \text{ ist.} \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Wir geben uns ein $p \in (0, 1)$ vor und setzen

$$A = (1 - p)B^T + \frac{p}{N}C.$$

Dabei sei C eine $N \times N$-Matrix, in welcher sämtliche Einträge 1 sind.

(a) Es sei ein **idealer** Zufallssurfer. Das heißt er surft (in einer Zeiteinheit) mit Wahrscheinlichkeit p auf irgendeine Seite und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ folgt er (wieder zufällig) einem der Links der Seite, auf der er sich gerade befindet. Gibt es keine Links, so springt der Zufallssurfer wieder auf irgendeine Seite. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit dieses Zufallssurfers auf der Seite i (= PageRank der Seite i) sei die i-te Komponente des Vektors x. Es verstreiche nun eine Zeiteinheit. Man zeige, dass dann die Wahrscheinlichkeit des Surfers sich auf der Seite i zu befinden nichts anderes ist als die i-te Komponente von Ax. Mit einem idealen Zufallssurfer meinen wir nun einen, bei dem die Aufenthaltswahrscheinlichkeit sich in der Zeit nicht ändert. Es soll also

$$Ax = x$$

gelten. (Inwiefern ein nicht-idealer Zufallssurfer sich einem idealen annähert und ob ein solcher Surfer immer existiert und eindeutig ist, wäre noch zu untersuchen.)
In jedem Fall ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit ein gutes Maß für die Wichtigkeit der Seite.

(b) Man berechne den PageRank für das unten abgebildete Netz $p = 1/2$, $p = 1$ und $p = 0$ (Lösung reicht).

(c) Was stört an $p = 1$ und was an $p = 0$?