ulm university universität uulm

Dr. Gerhard Baur
Manuel Bernhard
Wintersemester 2011/2012

Übungsblatt 11

Lineare Algebra für Informatiker und Ingenieure

(Abgabe ist zu **zweit** am 23.1.2012 um 12:10 Uhr in H22 **vor** der Übung)

Aufgabe 1 (*Die inverse Matrix*) (6+2+2)

Gegeben seien die Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{C}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 2+i \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 8 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2+i \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Man bestimme die inverse Matrix sofern möglich für A, B, C und D.
(b) Man berechne alle Lösungen von $Ax = b$ mit $x \in \mathbb{C}^6$.
(c) Man berechne alle Lösungen von $DX = C^T$ mit $X \in \mathbb{C}^{4,2}$.

Aufgabe 2 (*Determinante*) (3+1+2)

Gegeben seien die Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{C}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2+i \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Man berechne die Determinanten von A, B, und C.
(b) Man berechne $\det D$.
(c) Man berechne $\det(BC)$ und $\det(B+C)$.

Aufgabe 3 (2+2+2*)

Es sei $A \in K^{n,n}$, $\lambda \in K$, $B \in K^{m,m}$ und $C \in K^{n,m}$. Man beweise folgende Aussagen.

(a) Es gilt $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
(b) Es sei A invertierbar. Dann gilt $\operatorname{rg} AC = \operatorname{rg} C$.
(c) Es seien A und B reguläre Matrizen. Dann ist auch Blockmatrix

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in K^{n+m,n+m}$$

eine reguläre Matrix. Dabei ist 0 die Matrix bestehend nur aus Nulleinträgen und der Größe $m \times n$. Weiter ist die Inverse gegeben durch

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

Hinweis zu (c): Man darf ohne Beweis benutzen, dass für Blockmatrizen

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}$$

gilt (wie man es auch erwarten würde), wobei die Blockmatrizen aus den quadratischen Matrizen $A, E \in K^{n,n}$ und $D, H \in K^{m,m}$, sowie aus den Matrizen $B, F \in K^{n,m}$ und $C, G \in K^{m,n}$ gebildet wurden. Als Beispiel betrachte man auch die erste Aufgabe. Dort schreibt sich A als Blockmatrix von der Gestalt wie in Aufgabe 3 (c).