Beispiel einer $V \cap W$ und $V + W$ - Aufgabe

Es seien

$$V = \mathcal{LH}\,(v_1, v_2, v_3)$$
$$W = \mathcal{LH}\,(w_1, w_2, w_3)$$

mit den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Man bestimme eine Basis für $V + W$.

(b) Man bestimme eine Basis für $V \cap W$.

Lösungsvorschlag (Methode stures Rechnen):
ad (a)
Wegen

$$V + W = \mathcal{LH}\,(v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3)$$

kann man all diese Vektoren in eine Matrix schreiben und mit Gauß (Zeilenoperationen) ans Ziel kommen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -4 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man sieht nun, dass $1, 2, 4$ Stufenvariablen sind. Die zugehörigen Vektoren sind v_1, v_2, w_1 . Damit bilden diese Vektoren eine Basis (Zeilenoperationen wurden benutzt!).
ad (b)
Der Ansatz lautet zuerst alle Vektoren x zu finden, die sich schreiben lassen mit $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ in der Form:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = x = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \mu_3 w_3$$

Dies ist nicht so einfach. Wir bestimmen nun $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ zuerst. Man beachte, dass die Bedingung an μ_1, μ_2, μ_3 und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ genau

$$A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ -\mu_1 \\ -\mu_2 \\ -\mu_3 \end{pmatrix} = 0$$

entspricht.

Man hat aber A bereits in Zeilenstufenform gebracht. Man kann nun den Kern “ablesen”. Dieser ergibt sich

$$\ker A = \mathcal{LH}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\-3\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

Damit kann man aber die Vektoren x ablesen. Es ist also

$$V \cap W = \mathcal{LH}\left(-v_1 + v_2 + v_3, v_2, 2v_2\right) = \mathcal{LH}\left(0, -w_1 + w_2, -3w_1 + w_3\right) = \mathcal{LH}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Damit ist aber von $V \cap W$ der Vektor

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

eine Basis.