Invarianten unter Zeilen- und Spaltenoperationen

Spaltenoperationen

Wir betrachten eine Matrix A und eine Transformation von A in B durch Spaltenoperationen. Schematisch:

$$A = (a_1 \cdots a_n) \overset{\text{(S1)-(S3)}}{\rightsquigarrow} B = (b_1 \cdots b_n)$$

Welche Eigenschaften von A und der Spalten von A kann man nun von B noch ablesen?

- $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$
- $b_{j_1}, ..., b_{j_m}$ ist eine Basis von $\mathcal{LH}\,(a_1, ..., a_n)$ genau dann, wenn $b_{j_1}, ..., b_{j_m}$ eine Basis für $\mathcal{LH}\,(b_1, ..., b_n)$ ist. Dabei ist $m \leq n$ und $j_1, ..., j_m \in \{1, ..., n\}$.
- $\mathcal{LH}\,(a_1, ..., a_n) = \{Ax : \ x \in K^n\} = \{Bx : \ x \in K^n\} = \mathcal{LH}\,(b_1, ..., b_n)$
- $\det A = (-1)^{\#\text{Vertauschungen}} \det B$, falls man nur (S2) und (S3) benutzt.

Zeilenoperationen

Wir betrachten eine Matrix A und eine Transformation von A in B durch Zeilenoperationen. Schematisch:

$$A = (a_1 \cdots a_n) \overset{\text{(Z1)-(Z3)}}{\rightsquigarrow} B = (b_1 \cdots b_n)$$

Welche Eigenschaften von A und der Spalten von A kann man nun von B noch ablesen?

- $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$
- $a_{j_1}, ..., a_{j_m}$ ist eine Basis von $\mathcal{LH}\,(a_1, ..., a_n)$ genau dann, wenn $b_{j_1}, ..., b_{j_m}$ eine Basis für $\mathcal{LH}\,(b_1, ..., b_n)$ ist. Dabei ist $m \leq n$ und $j_1, ..., j_m \in \{1, ..., n\}$.
- $\ker A = \ker B$
- $\det A = (-1)^{\#\text{Vertauschungen}} \det B$, falls man nur (Z2) und (Z3) benutzt.
- Hat man $(A|b) \rightsquigarrow (B|c)$ durch Zeilenoperationen erhalten, dann ist die Lösungsmenge von $Ax = b$ und $Bx = c$ identisch.

Hinweise

- Man beachte den Unterschied im Punkt 2 bezüglich Zeilen- und Spaltenoperationen. Bei Zeilenoperationen muss man $b_{j_1}, ..., b_{j_m}$ mit $a_{j_1}, ..., a_{j_m}$ austauschen. Dies ist bei Spaltenoperationen nicht der Fall.

  Soll man nun beispielsweise eine Basis von $\mathcal{LH}\,(a_1, ..., a_n)$ finden, die aus einer Teilmenge von $a_1, ..., a_n$ besteht, so sollte man Zeilenoperationen benutzen. Ist aber egal woher die Basis kommt, dann kann man auch Spaltenoperationen benutzen (vielleicht hat man das bereits berechnen müssen, oder es scheint augenscheinlich einfacher zu sein).
- Zu der Berechnung von $\operatorname{rg} A$ und $\det A$ kann man Spalten und Zeilenoperationen benutzen.

- Man kann entsprechendes auch für Zeilenvektoren der Matrix A sagen. Dazu muss man nur immer „Zeile“ mit „Spalte“ austauschen und umgekehrt.

Ablesen aus Zeilenstufenform

Wie kann man dies nun nutzen? Es ist bekannt, dass man durch **Zeilenoperationen** immer erreichen kann, dass B eine Matrix in Zeilenstufenform ist. Man kann also

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & p_1 & * & & \cdots & & * \\ 0 & \cdots & & & p_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & p_r & * \; \cdots & * \\ 0 & & & & \cdots & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$$

erreichen, wobei $p_1, ..., p_r$ je nicht Null sind. Man sieht nun leicht, dass $r = \operatorname{rg} A$ ist. Weiter kann man viele Dinge aus der Zeilenstufenform besser ablesen als aus einer allgemeinen Matrix. Beim Rang haben wir es bereits gesehen. Im folgenden sei B eine Matrix in Zeilenstufenform. Dann ist

- $\det B = \prod \text{Diagonaleinträge}$.
- $\operatorname{rg} B = r =$ Zahl der Stufenvariablen (in der Literatur auch Pivots genannt) .
- $\ker B$ hat eine Basis $v_1, ..., v_{n-r}$. Dabei setzt man für jedes v_i eine andere Nichtstufenvariable auf eine beliebige Zahl $\neq 0$ und alle anderen $= 0$. Die Werte für die Stufenvariablen erhält man über $Bv_i = o$ (Jede nicht-triviale Zeile kann man nach einer Stufenvariablen auflösen).
- $Ax = b$ berechnet man ähnlich. Zuerst führt man mit Zeilenoperationen die Matrix $(A|b)$ über in $(B|c)$, wobei diese in Zeilenstufenform ist. Nun ist aber $Ax = b$ genau dann lösbar, wenn im Teil von c keine neue Stufe beginnt. Also ist dies äquivalent zu $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg}(B|c)$ (dies kann man aus der Zeilenstufenform ja einfach ablesen). Wir gehen davon aus, dass das LGS lösbar ist (sonst ist man ja schon fertig).

  Man muss nun eine spezielle Lösung x_s finden. Dies bekommt man, indem man in x_s alle Nichtstufenvariablen (von B) auf 0 setzt. Die Stufenvariablen kann man nun wieder leicht ablesen. Jede Stufenvariable (von B) wird durch eine nicht-triviale Zeile von $Bx_s = c$ bestimmt.

  Die Lösungsmenge ist nun
  $$x_s + \ker B.$$

  Siehe dazu auch den vorigen Punkt.
- Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(m)} \end{pmatrix} \overset{\text{(Z1)-(Z3)}}{\rightsquigarrow} B = \begin{pmatrix} b^{(1)} \\ \vdots \\ b^{(r)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

und B in Zeilenstufenform, sowie $b^{(1)}, ..., b^{(r)}$ die Zeilen, die $\neq 0$ sind. Dann ist $b^{(1)}, ..., b^{(r)}$ eine Basis von $\mathcal{LH}\left(a^{(1)}, ..., a^{(m)}\right) = \mathcal{LH}\left(b^{(1)}, ..., b^{(m)}\right)$.

- Man bringen A mit Zeilenumformungen in Zeilenstufenform B . Schematisch schreibt sich dies als

  $$A = (a_1 \cdots a_n) \overset{\text{(Z1)-(Z3)}}{\rightsquigarrow} B = (b_1 \cdots b_n) .$$

  Dann bilden die „Stufenspalten“ $b_{j_1}, ..., b_{j_r}$ eine Basis von $\mathcal{LH}(b_1, ..., b_n)$. Damit bildet also $a_{j_1}, ..., a_{j_r}$ eine Basis von $\mathcal{LH}(a_1, ..., a_n)$. Aber man kann auch andere Zeilen als Basis wählen. Will man wissen, ob $a_{k_1}, ..., a_{k_r}$ ($r = \operatorname{rg} A$ viele müssen es sein) eine Basis von $\mathcal{LH}(a_1, ..., a_n)$ ist, dann geht man wie folgt vor:

  Man streiche alle Spalten $i \notin \{k_1, ..., k_r\}$ von B . Dann kann man (dies ist sehr einfach, weil B schon in Zeilenstufenform ist) den Rang dieser Matrix bestimmen. Ist dieser Rang gleich r (wurde also durch die Streichung nicht kleiner), dann ist $a_{k_1}, ..., a_{k_r}$ eine Basis von $\mathcal{LH}(a_1, ..., a_n)$.

Machen Sie sich am besten zu jeder dieser Dinge mehrere Beispiele. Solche finden sich auf den Übungsblättern, im Vorlesungsmitschrieb, in Altklausuren, ...

So versteht man das denke ich am schnellsten.