



# Übungen zur Variationsrechnung

Dr. Gerhard Baur  
Daniel Hauer  
WS 2012/2013

## Übungsblatt 4

Die Übung findet am Donnerstag, den 29. November 2012 in N24/131 um 14 Uhr statt.

---

**Aufgabe 1.** Bestimme die Extremalen für folgende Variationsprobleme:

$$(a) \quad I(x) = \int_0^1 \sqrt{1 + \dot{x}^2} dt = \min, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1;$$

$$(b) \quad I(x) = \int_1^2 t(\dot{x} + 3)^2 dt = \min, \quad x(1) = 0, \quad x(2) = 0;$$

$$(c) \quad I(x) = \int_0^1 (\dot{x}^2 + t^2 x) dt = \min, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1;$$

$$(d) \quad I(x) = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + \dot{x}^2} x(t) dt = \min, \quad x(0) = x_1 > 0, \quad x(1) = x_2 > 0.$$

**Aufgabe 2.** Bestimme die Extremalen für das folgende Variationsproblem mit freiem rechten Rand:

$$I(x) = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + \dot{x}}}{x} dt = \min, \quad x(0) = 0, \quad x(b) = \varphi(b)$$

wenn die Funktion  $\varphi$  gegeben ist durch

$$(a) \quad \varphi(b) = b - 5, \quad b \in \mathbb{R};$$

$$(b) \quad \varphi(b)^2 + (b - 9)^2 = 9, \quad b \in \mathbb{R}.$$

**Aufgabe 3.** Bestimme, falls existent, die Extremalen für das folgende Variationsproblem ohne Randbedingungen:

$$I(x) = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} \dot{x}^2 + x \dot{x} + \dot{x} + x \right\} dt = \min.$$

**Aufgabe 4.** Bestimme die Extremalen für das folgende Variationsproblem mit Nebenbedingung in Integralform:

$$I(x) = \int_0^1 \dot{x}^2 dt = \min, \quad J(x) = \int_0^1 x^2 dt = 2.$$