Übungen zur Variationsrechnung

Übungsblatt 6

Dr. Gerhard Baur
Daniel Hauer

WS 2012/2013

Die nächste Übung findet am Donnerstag, den 24. Januar 2013 in N24/131 um 14 Uhr statt.

Aufgabe 1. Gegeben sei das Variationsproblem

$$(1) \qquad I(x) = \int_0^2 \dot{x}^2(1+\dot{x})^2\,dt, \qquad x(0) = 1,\ x(2) = 0.$$

Zeige:

(a) Jede Extremale von (1) ist stückweise linear.

(b) Hat eine Lösung x von (1) eine Ecke $t^* \in (0,2)$, so gilt: $\dot{x}(t^*+),\ \dot{x}(t^*-) \in \{-1, 0\}$.

(c) Gebe eine globale Lösung x von (1), und zeige, dass diese nicht eindeutig ist.

(d) Das Problem $I(x) = \max$, $x(0) = 1$, $x(2) = 0$ besitzt keine Lösung.

Aufgabe 2.

(a) Berechne eine Extremale x des folgenden Variationsproblems

$$I(x) = \int_1^2 \tfrac{1}{t}\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt = \min,$$

welche die Randbedingungen $x(1) = 0$, $x(2) = 1$ erfüllt. Prüfe mittels einer kleinen Rechnung nach, ob diese Extremale x die folgenden notwendigen Bedingungen erfüllt:

(i) die notwendige Bedingung von Weierstraß,

(ii) die 2. Weierstraß-Erdmann'sche Eckenbedingung,

(iii) die notwendige Bedingung von Lagrange.

(b) Für jedes $t \in [a,b]$, seien $P(t)$ und $Q(t)$ zwei reelle symmetrische $(n \times n)$-Matrizen und $P(t)$ sei insbesondere positiv semidefinit. Zeige, dass für das Variationsproblem

$$I(x) = \int_a^b \left\{\dot{x}^T P(t)\dot{x} + x^T Q(t)x\right\} dt = \min, \quad x \in \mathcal{R}$$

jede zulässige Funktion x die notwendige Bedingung von Weierstraß erfüllt.