



Maßtheorie - Übungsblatt 7
(Abgabe: Mittwoch, 05. Dezember 2012 vor der Übung.)

Aufgabe 14 (*Nullmenge*)

(8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend, differenzierbar und f' sei beschränkt. Zeigen Sie für $E \subset \mathbb{R}$

$$\lambda(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_f(E) = 0.$$

Aufgabe 15 (*Translationsinvarianz*)

(8 Punkte)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \geq 0$ und $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ ein Maßraum mit

$$\mu(E) := \sum_{n \in E} a_n$$

Zeigen Sie:

$$\mu \text{ ist translationsinvariant} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Folge } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist konstant.}$$

Das heißt, $\exists c \geq 0$ mit $\mu(E) = c \sum_{n \in E} 1$, also ist μ ein Vielfaches des Zählmaßes.

Aufgabe 16 (*Lebesguemaß offener/kompakter Mengen*)

(2+2=4 Punkte)

Zeigen Sie:

a) $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$ offen $\Rightarrow \lambda(E) > 0$

b) $E \subset \mathbb{R}$ kompakt $\Rightarrow \lambda(E) < \infty$.