



Maßtheorie - Übungsblatt 8
(Abgabe: Mittwoch, 12. Dezember 2012 vor der Übung.)

Aufgabe 17 (*Messbarkeit monotoner Funktionen*)

(6 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$f \text{ monoton} \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist } \mathcal{B}\text{-messbar.}$$

Aufgabe 18 (*Vererbung von Messbarkeit*)

(4+4=8 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum und $f, f_n, g : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \forall n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) f \mathcal{A} -messbar, $f = g$ μ -fast überall $\Rightarrow g$ \mathcal{A} -messbar.

b) f_n \mathcal{A} -messbar $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ μ -fast überall $\Rightarrow f$ \mathcal{A} -messbar.

Bemerkung: Ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt **vollständig**, wenn jede Teilmenge einer Nullmenge messbar ist, d.h.

$$F \subset E, E \mu\text{-Nullmenge} \quad \Rightarrow \quad F \in \mathcal{A}$$

Aufgabe 19 (*Verknüpfung messbarer Funktionen*)

(6 Punkte)

Sei (Ω, \mathcal{A}) ein messbarer Raum, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{A} -messbar und $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-messbar. Zeigen Sie, dass gilt

$$\varphi \circ f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar.}$$