Dr. Gerhard Baur
M.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Maßtheorie
Wintersemester 2012/2013

Maßtheorie - Übungsblatt 15

(Abgabe: **freiwillig,** Mittwoch, 13. Feburar 2013 vor der Übung.)

Aufgabe 35 *(L_1-Raum)*

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar. Weiter sei

$$E_n := \{x \in \Omega \ : \ (n-1) \leq |f(x)| < n\}.$$

Zeigen Sie

$$f \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n\mu(E_n) < \infty.$$

Aufgabe 36 *(L_p-Raum)*

Sei der Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ gegeben und

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (1 + |\log x|)} \quad , \ x > 0.$$

Zeigen Sie

$$f \in L_p(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda) \qquad \Leftrightarrow \qquad p = 2.$$

Aufgabe 37 *(Zusammenhang der L_p-Räume)*

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und sei $1 \leq p \leq s < \infty$. Zeigen Sie

$$L_s(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \subset L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$$

und es gibt ein $c > 0$ mit

$$||f||_p \leq c \, ||f||_s \qquad \forall \, f \in L_s(\Omega, \mathcal{A}, \mu).$$