

Übungen zur Angewandten diskreten Mathematik

(<https://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ws1516/angewandte-diskrete-mathematik.html>)

(Abgabe und Besprechung am Freitag, den 18.12.15 um 14:15 in H22)

16. Betrachte die Gruppe $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ mit Elementen $0, 1, \dots, 11$. Zeige, dass $U = \{3, 6, 9, 0\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ ist. Bilde alle Nebenklassen von U . Was ist der Index von U ?

(3 Punkte)

17. Betrachte das RSA-Verfahren mit RSA-Modul $m = 13 \cdot 17 = 221$ und Verschlüsselungsexponent $e = 77$. Berechne den Entschlüsselungsexponenten d und verschlüssele die Nachricht $N = 7$, um c zu erhalten. Überprüfe, ob c^d die ursprüngliche Nachricht N ergibt.

(4 Punkte)

18. Gib jeweils ein Beispiel einer Gruppe (G, \circ) mit $|G| = \infty$ und einer Untergruppe U von G an, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (a) $|U| = \infty$ und $\text{ind}_G U = \infty$.
- (b) $|U| = \infty$ und $\text{ind}_G U < \infty$.
- (c) $|U| < \infty$ und $\text{ind}_G U = \infty$.

(6 Punkte)

19. Für eine (G, \circ) eine Gruppe definieren wir $Z(G) := \{x \in G : ax = xa \text{ für alle } a \in G\}$ als das Zentrum von G .

- (a) Zeige für alle Gruppen (G, \circ) , dass $Z(G)$ eine abelsche Untergruppe von G ist.
- (b) Berechne das Zentrum $Z(S_3)$ der symmetrischen Gruppe S_3 .

(5 Punkte)

20. Betrachte $(\{a, b, c, d\}, \circ)$ mit folgender Verknüpfungstafel:

| | | | | |
|---------|---|---|---|---|
| \circ | a | b | c | d |
| a | a | b | c | d |
| b | b | a | d | c |
| c | c | d | a | b |
| d | d | c | b | a |

- (a) Zeige, dass $(\{a, b, c, d\}, \circ)$ eine Gruppe ist. Hierbei braucht das Assoziativgesetz nicht überprüft werden.
- (b) Finde eine Untergruppe U von S_4 , die isomorph zu $(\{a, b, c, d\}, \circ)$ ist.

(6 Punkte)

21. Sei $p \notin \{2, 5\}$ eine Primzahl. Zeige, dass p mindestens eine der folgenden p Zahlen teilt:

$$1, 11, 111, 1111, \dots, \underbrace{1 \dots 1}_{p\text{-mal}}$$

Tipp: Betrachte Differenzen zweier o.g. Zahlen.

(6 Punkte)