Universität Ulm

Dr. G. Baur
M. Gerlach
WS 2013/14

Zweite Klausur Analysis II

1. Berechnen Sie (12)

(a) falls existent den Wert des Integrals $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$.

(b) eine Stammfunktion von $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, gegeben durch $f(x):=\frac{1}{x^2(x-1)}$.

2. Berechnen Sie den Wert folgender Integrale (12)

(a) $\displaystyle\iint_M x\,\mathrm{d}(x,y)$, wobei $M:=\{(x,y)^T\in\mathbb{R}^2 : x+y\le 1,\ x,y\ge 0\}$

(b) $\displaystyle\iiint_M (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}(x,y,z)$, wobei $M:=\{(x,y,z)^T\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 25\}$

3. Es sei (14)

$$M:=\left\{(x_1,\dots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^n x_k^2\le 1\right\}$$

und $f:M\to\mathbb{R}$ gegeben durch $f(x_1,\dots,x_n):=\sum_{k=1}^n x_k$. Zeigen Sie, dass $\max_M f$ und $\min_M f$ existieren und berechnen Sie diese Werte.

4. Zeigen Sie: Durch die Gleichung $xy^3+x^3y=2$ ist lokal bei $(x_0,y_0)=(1,1)$ eine Funktion $y(x)$ gegeben, welche monoton fällt. (10)

5. Untersuchen Sie folgende Funktionen $f:G\to\mathbb{R}$ auf (totale) Differenzierbarkeit und berechnen Sie ggf. ihre Ableitung. (15)

(a) $G=(-1,1),\quad f(x):=\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{x^k}{k}$

(b) $G=\mathbb{R}^2,\quad f(x,y):=\begin{pmatrix} x^3\log(y^2+1)\\ y-x\end{pmatrix}$

(c) $G=\mathbb{R},\quad f(x):=\displaystyle\int_1^{e^x}\frac{1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t$

6. Bestimmen Sie – ohne Beweis – das Innere, den Rand und den Abschluss der Menge (12)

$$M:=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\right\}\setminus\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{n}\\0\end{pmatrix} : n\in\mathbb{N}\right\}\subset\mathbb{R}^2.$$

7. Bestimmen und klassifizieren Sie alle lokalen Extremstellen der durch $f(x,y):=-x^2+2xy-2y^3$ gegebenen Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. (13)

8. Berechnen Sie jeweils den Wert des Kurvenintegrals $\int_\gamma f$ in den folgenden Fällen. (12)

(a) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) := (-y, x).$

(b) $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) := \begin{pmatrix} t^3 + t^4 + 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\} \to \mathbb{R}^2,$
$f(x, y) := \left(\frac{x}{x^2+y^2+1} + 1, \frac{y}{x^2+y^2+1}\right).$