Gerhard Baur
Matthias Heinlein
Marcus Heitel

Wintersemester 2015/2016
29. Oktober 2015
Blatt 3

Übungen zu Analysis 2

(`https://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ws1516/analysis-2.html`)

Abgabe bis zum 03.11.15 12:15 Uhr im H14

9. (i) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x) = 0$ für alle $x \neq x_0$ für ein $x_0 \in [a, b]$. Zeige: Dann ist f intergrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

(ii) Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Funktionen, die an allen Stellen bis auf endlich viele Ausnahmen übereinstimmen. Zeige: Wenn f integrierbar ist, so ist es auch g und es gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

(4+4=8 Punkte)

10. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

(i) Es existiere die Ableitung $f'(x)$ und sei beschränkt auf I . Zeige, dass dann f auf I gleichmäßig stetig ist, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so, dass für alle $x, x' \in I$ mit $|x - x'| < \delta$ stets $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ gilt.

(ii) Zeige, dass $f_1(x) = \frac{1}{x}$ auf $I = (0, 1]$ nicht gleichmäßig stetig ist.

(iii) Zeige, dass $f_2(x) = x^2$ auf $(1, \infty)$ nicht gleichmäßig stetig ist.

(iv) Zeige, dass $f_3(x) = \sqrt{x}$ auf $I = [0, \infty)$ gleichmäßig stetig ist.

(3+2+2+3=10 Punkte)

11. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Zeige, dass dann $g : [\frac{a}{2}, \frac{b}{2}] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(2x)$ integrierbar ist und

$$\int_a^b f(x)dx = 2\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} g(x)dx.$$

(6 Punkte)

12. Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Funktionen. Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

(i) Es sei $|f| \in R[a, b]$. Dann gilt auch $f \in R[a, b]$.

(ii) Wenn $f + g, f - g \in R[a, b]$, dann gilt auch $f, g \in R[a, b]$.

(3+3=6 Punkte)