Gerhard Baur
Matthias Heinlein
Marcus Heitel

Wintersemester 2015/2016
22. Dezember 2015
Blatt 11

Übungen zu Analysis 2

(`https://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ws1516/analysis-2.html`)

Abgabe bis zum 12.01.16 12:15 Uhr im H14

49. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. Zeige: f ist in $(0,0)$ stetig und partiell differenzierbar nach beiden Variablen, aber nicht total differenzierbar. (6 Punkte)

50. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Betrachte für $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ die Funktionen

$$T(r, \varphi, \theta) := (r \cos\varphi \cos\theta, r \sin\varphi \cos\theta, r \sin\theta) \quad \text{und} \quad g(r, \varphi, \theta) = f(T(r, \varphi, \theta))$$

Zeige, dass die Spalten der Ableitungsmatrix von T orthogonal aufeinander stehen. Für welche Werte von r, φ, θ ist T' regulär und wie rechnen sich in diesem Fall $\triangledown f$ und $\triangledown g$ ineinander um? (6 Punkte)

51. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die $f(tx) = t^\alpha f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $t \in (0, \infty)$ erfüllt. Zeige, dass

$$\alpha f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} x_k$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist.

Hinweis: Sei $\varphi(t) = f(tx)$. Berechne $\varphi'(1)$ auf zwei Arten. (6 Punkte)

52. Es sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = x^y$.

    (i) Bestimme alle partiellen Ableitungen von f bis zur dritten Ordnung.

    (ii) Berechne näherungsweise $1{,}05^{1{,}02}$ mit einem Fehler kleiner als 10^{-4} .

(6 Punkte)

53. Berechne und klassifiziere alle lokalen Extremstellen von $f : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y).$$

(6 Punkte)