

Übungen zu Analysis 2

(<https://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ws1516/analysis-2.html>)

Abgabe bis zum 09.02.16 12:15 Uhr im H14

69. Beweise den Satz von Fubini für stetige Funktionen:

Sei $M = [\alpha, \beta] \times [a, b] \subset \mathbb{R}^2$ und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Dann gilt

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_a^b f(x, t) dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) dx \right) dt$$

Anleitung: Definiere Funktionen $g(y)$ und $h(y)$, die aus den obigen iterierten Integralen bestehen, indem du b durch y ersetzt. Berechne die Ableitungen mit den passenden Ableitungsregeln für Parameterintegrale. Zeige, dass $g \equiv h$ gilt. (6 Punkte)

70. Gegeben sei das Parameterintegral

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(xt) e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Zeige, dass y die Differentialgleichung $y'(x) = -xy(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, berechne $y(0)$ und damit $y(x)$. (6 Punkte)

71. Berechne die Volumina der folgenden Körper:

$$(i) \quad K = \left\{ \begin{pmatrix} (R_1 + r \sin \varphi) \cos \theta \\ (R_1 + r \sin \varphi) \sin \theta \\ r \cos \varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq R_2, 0 \leq \varphi, \theta \leq 2\pi \right\} \text{ für feste } R_1, R_2 > 0.$$

$$(ii) \quad K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 \leq Rx \right\} \text{ für festes } R > 0.$$

(4+5=9 Punkte)

72. Berechne den Schwerpunkt einer Achtelkugel $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x, y, z \geq 0 \right\}$. (6 Punkte)

73. Berechne

$$\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) dy dx.$$

(3 Punkte)

Bitte zur Vorleistung im LSF anmelden!