Gerhard Baur
Matthias Heinlein
Marcus Heitel

Wintersemester 2015/2016
11. April 2016
Blatt 16

Übungen zu Analysis 2

(`https://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ws1516/analysis-2.html`)

74. Sei $M = \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \le z \le x^2+y^2 \le 1,\ y \ge x\right\}$ und $f : M \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) = 3x^2yz$. Berechne $\int\limits_M f \,\mathrm{d}(x,y,z)$.

Lösung:
Bei dieser Aufgabe wollen wir die Parameter (x,y) durch Polarkoordinaten (PK) ersetzen:

$$(x,y) = r(\cos\varphi, \sin\varphi).$$

Da zusätzlich $x^2+y^2 \le 1$ und $y \ge x$ erfüllt sein sollen, müssen daher r und φ so gewählt werden, dass $0 \le r \le 1$ und $\frac{1}{4}\pi \le \varphi \le \frac{5}{4}\pi$. Dadurch erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int\limits_M f \,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int\limits_0^1 \iint\limits_{z \le x^2+y^2 \le 1, y \ge x} 3x^2yz \ \mathrm{d}(x,y)\,\mathrm{d}z \overset{\text{PK}}{=} \int\limits_0^1 \int\limits_{\sqrt{z}}^1 \int\limits_{\pi/4}^{5\pi/4} 3z(r^2\cos^2\varphi)\,(r\sin\varphi)\, r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z \\
&= \int\limits_0^1 \int\limits_{\sqrt{z}}^1 \int\limits_{\pi/4}^{5\pi/4} zr^4\, 3\cos^2\varphi \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^1 \int\limits_{\sqrt{z}}^1 zr^4 \left[-\cos^3\varphi\right]_{\varphi=\pi/4}^{5\pi/4} \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z \\
&= \int\limits_0^1 \int\limits_{\sqrt{z}}^1 zr^4 \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right] \mathrm{d}r\,\mathrm{d}z = \frac{\sqrt{2}}{2} \int\limits_0^1 z \left[\frac{1}{5}r^5\right]_{r=\sqrt{z}}^1 \mathrm{d}z \\
&= \frac{\sqrt{2}}{10} \int\limits_0^1 z\left(1 - z^{\frac{5}{2}}\right)\mathrm{d}z = \frac{\sqrt{2}}{10}\left[\frac{1}{2}z^2 - \frac{2}{9}z^{\frac{9}{2}}\right]_{z=0}^1 = \frac{\sqrt{2}}{10} \cdot \frac{9-4}{18} = \frac{\sqrt{2}}{36}
\end{aligned}$$

75. Entscheide, ob folgende Vektorfelder $f : G \to \mathbb{R}^n$ Gradientenfelder sind und bestimme ggf. eine Stammfunktion von f auf G . Berechne außerdem $\int_\gamma f$ für die jeweils angegebene(n) Kurve(n) γ .

(a) Es sei $n = 3$, $G = \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \ :\ y > 0\right\}$, $\gamma : [0, 2\pi] \to G$ gegeben durch $\gamma(t) := (\cos t, 2 + \sin t, t)^T$ sowie

$$f(x,y,z) := \left(z^2, \frac{e^z}{y} + y, 2xz + e^z \log y\right).$$

(b) Es sei $n = 2$, $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\}$ und $f(x,y) := \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$. Dazu seien die Kurven

$$\gamma : \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \to G,\ \gamma(t) := (\sin t, \cos t)^T$$

und

$$\gamma : [0,1] \to G,\ \gamma(t) := (-t, 1-t)^T$$

gegeben.

Lösung:
zu (a): Die Menge G ist sternförmig und f erfüllt die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \qquad \text{für } 1 \leq i, j \leq 3.$$

Somit ist f ein Gradientenfeld. Jede Stammfunktion F muss wegen $F_y = f_2$ von der Form

$$F(x,y,z) = e^z \log y + \frac{1}{2} y^2 + c(x,z)$$

sein. Damit folgt $F_z(x,y,z) = e^z \log y + c_z(x,z) \stackrel{!}{=} e^z \log y + 2xz = f_3$. Dadurch erhalten wir

$$c(x,z) = xz^2 + d(x).$$

Wiederum mit $F_x(x,y,z) = c_x(x,z) = z^2 + d'(x) \stackrel{!}{=} z^2 = f_1$ ergibt sich eine mögliche Stammfunktion F als

$$F(x,y,z) = e^z \log y + \frac{1}{2} y^2 + xz^2.$$

Schließlich erhalten wir für das Kurvenintegral

$$\int_\gamma f = F\left(\gamma(2\pi)\right) - F\left(\gamma(0)\right) = F(1,2,2\pi) - F(1,2,0) = e^{2\pi} \log 2 + 4\pi^2 - \log 2.$$

zu (b): Obwohl f die Integrabilitätsbedingungen erfüllt, ist f kein Gradientenfeld, da sich für die geschlossene Kurve $\psi : [0, 2\pi] \to G,\ \ \psi(t) = (\sin t, \cos t)^T$ für das Kurvenintegral

$$\int_\psi f = \int_0^{2\pi} (-\cos t, \sin t) \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} -1 \,\mathrm{d}t = -2\pi \neq 0$$

ergibt (insbesondere ist G hier kein sternförmiges Gebiet!)
Integriert man über den in der Aufgabenstellung angegebenen Bereich von 0 bis $\frac{3}{2}\pi$ erhält man

$$\int_\gamma f = -\frac{3}{2}\pi.$$

Für die zweite Kurve erhalten wir

$$\int_\gamma f = \int_0^1 \frac{1}{t^2 + (1-t)^2} (t-1, -t) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{t^2 + (1-t)^2} \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{2t^2 - 2t + 1} \,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{(2t-1)^2 + 1} \,\mathrm{d}t = \arctan(2t-1)\Big|_{t=0}^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$