Universität Ulm
Gerhard Baur
Bianca Jaud

Übungen zum Seminar
Grundlagen der Mathematik
Blatt 4
Abgabe: Dienstag 10.11.2015

Aufgabe 1 (2 + 2 + 2 + 2 + 3 = 11 Punkte)

Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Funktion. Beweise für $X_1, X_2 \subset A$ und $Y_1, Y_2 \subset B$ folgende Aussagen:

(a) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$

(b) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$

(c) $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$

(d) $f^{-1}\left(Y_1^c\right) = \left(f^{-1}\left(Y_1\right)\right)^c$

(e) $f^{-1}\left(f\left(X_1\right)\right) \supset X_1$ und es gilt sogar die Gleichheit beider Mengen, wenn f injektiv ist.

Aufgabe 2 (1,5 + 2 + 1,5 = 5 Punkte)

(a) Gegeben sei die Zuordnungsvorschrift $f : \mathcal{P}\left(\{1, 2, 3, 4\}\right) \longrightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $A \longmapsto |A|$.
  1) Ist f eine Funktion?
  2) Ist f injektiv?
  3) Ist f surjektiv?

  Begründe deine Antwort.

(b) Gegeben ist die Zuordnungsvorschrift $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$.
  1) Begründe, warum f keine Funktion ist.
  2) Finde Teilmengen M und N von $\mathbb{R}$, sodass $f : M \longrightarrow N$, $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$ eine Funktion ist.
  3) Finde Teilmengen M und N von $\mathbb{R}$, sodass $f : M \longrightarrow N$, $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$ surjektiv ist.
  4) Finde Teilmengen M und N von $\mathbb{R}$, sodass $f : M \longrightarrow N$, $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$ injektiv ist.

(c) Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Funktion. Der Graph von f ist definiert als die Menge

$$\Gamma_f := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}.$$

Betrachte folgende Mengen:

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - 2x + 1\}$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2 - 2y + 1\}$$

$$\Gamma_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$$

Für welche Γ_i existiert eine Funktion f_i, sodass Γ_i der Graph von f_i ist? Gib jeweils eine solche Funktion f_i an oder begründe, warum es keine gibt.

Ein Beweis, der nicht streng ist, ist nichts.
Henri Poincaré (1854 - 1912)

Universität Ulm
Gerhard Baur
Bianca Jaud

Übungen zum Seminar
Grundlagen der Mathematik
Blatt 4
Abgabe: Dienstag 10.11.2015

Aufgabe 3 (2 + 2 = 4 Punkte)

Es seien folgende Mengen gegeben:

$$A := \{\text{Deutschland}, \text{England}, \text{Italien}, \text{USA}, \text{Vatikan}\}$$

$$B := \{\text{Gauck}, \text{Elisabeth II}, \text{Franziskus}, \text{Merkel}, \text{Obama}, \text{Mattarella}, \text{Bertello}\}$$

Die Funktion $f : A \to B$ weise jedem Element aus A (Land) ihr zugehöriges Staatsoberhaupt aus B zu. Die Funktion $g : B \to A$ weise jeder Person aus B ihrem zugehörigen Land zu.

(a) Entscheiden Sie, ob die Funktionen f, g injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind.

(b) Bestimmen Sie

$$f(\{\text{Deutschland}, \text{Italien}, \text{USA}\}), f^{-1}(\{\text{Elisabeth II}, \text{Merkel}\}),$$

$$g(\{\text{Gauck}, \text{Franziskus}, \text{Merkel}\}), g^{-1}(\{\text{Italien}, \text{Deutschland}\})$$

Ein Beweis, der nicht streng ist, ist nichts.
Henri Poincaré (1854 - 1912)