



**Aufgabe 1** (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

- (a) Es sei  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  die Funktion, die einer Zahl ihr Quadrat zuordnet. Untersuchen Sie  $f$  auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität und bestimmen Sie

$$f(\{2, 4, 5\}) \text{ und } f^{-1}(\{1, 4, 5\}).$$

- (b) Gegeben seien die Funktionen  $f : B \rightarrow C$ ,  $g : A \rightarrow B$ . Zeigen Sie

$$f \circ g \text{ injektiv} \Rightarrow g \text{ injektiv}$$

- (c) Berechnen Sie die Umkehrfunktionen von

$$f(x) = 3x + 3 \text{ und } g(x) = 2^x.$$

**Aufgabe 2** (3 Punkte)

Seien  $f : A \rightarrow B$  und  $g : B \rightarrow C$  bijektive Abbildungen. Zeigen Sie, dass  $g \circ f : A \rightarrow C$  auch bijektiv ist und bestimmen Sie die Umkehrfunktion von  $g \circ f$  in Abhängigkeit von  $f^{-1}$  und  $g^{-1}$ .

**Aufgabe 3** (1 + 2 + 2 + 1 = 6 Punkte)

Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen? Begründen Sie ihre Antwort. Geben Sie wenn möglich auch die Äquivalenzklassen an.

- $M_1 = \{\text{Menschen}\}$ ,  $R_1 = \{(x, y) \in M_1 \times M_1 \mid x \text{ ist mit } y \text{ verwandt}\}^1$
- $M_2 = \{\text{Menschen}\}$ ,  $R_2 = \{(x, y) \in M_2 \times M_2 \mid x \text{ lebt im gleichen Land wie } y\}^2$
- $M_3 = \mathbb{R}$ ,  $R_3 = \{(x, y) \in M_3 \times M_3 \mid x - y \in \mathbb{Z}\}$
- $M_4 = \mathbb{R}$ ,  $R_4 = \{(x, y) \in M_4 \times M_4 \mid y = x^2\}$

**Bonusaufgabe** (4 Punkte)

Du bist auf einer Party und lernst ein nettes Mädchen/einen netten Jungen kennen. Nun möchtest du unbedingt ihren/seinen Geburtstag, ihr/sein Alter und ihre/seine Schuhgröße wissen ohne einfach nur danach zu fragen.

In dieser Situation können dir folgende zwei Spiele hilfreich sein:

Sei  $m$  die Zahl des Monats ( $m \in \{1, \dots, 12\}$ ) und  $t$  der GeburtsTAG (Beispiel: 13. Juni, das heißt  $m = 6$  und  $t = 13$ ). Gehe nun vor wie folgt:

- 1) Multipliziere die Zahl des Monats mit 5.

---

<sup>1</sup>Bedenke, dass es einen Unterschied zwischen verwandt und verschwägert gibt.

<sup>2</sup>Damit ist nur der Hauptwohnsitz gemeint.



- 2) Addiere dazu die Zahl 7.
- 3) Multipliziere das Ergebnis des vorhergehenden Schrittes mit 4.
- 4) Addiere die Zahl 13.
- 5) Multipliziere das Ergebnis mit 5.
- 6) Addiere den GeburtsTAG
- 7) Subtrahiere die Zahl 205.

Lass dir das Ergebnis nennen. Die Hunderterstelle verrät uns den Monat, der Rest den Tag der Geburt.

Zahlenbeispiel: Geburtstag 13. Juni

$30 + 7 = 37$ ;  $4 \cdot 37 = 148$ ;  $148 + 13 = 161$ ;  $5 \cdot 161 = 805$ ;  $803 + 13 = 818$ ;  $818 - 205 = 613$

Nun das Alter und die Schuhgröße:

- 1) Die Altersjahre mit 20 multiplizieren.
- 2) Die „Zahl“ des heutigen Tages addieren (zum Beispiel: 13. Juni, addiere 13).
- 3) Multipliziere das Ergebnis mit 5.
- 4) Addiere nun die Schuhgröße (zum Beispiel 38).

Von diesem Zwischenergebnis musst du nun **im Kopf** das Fünffache der Zahl des heutigen Tages abziehen. Nun geben uns die Hunderter und die Tausender das gesuchte Alter, der Rest die Schuhgröße an (zum Beispiel ergibt 2038 das Alter von 20 Jahren und eine Schuhgröße von 38 an).

**Beantworte nun folgende Frage:**

Wie funktionieren diese beiden „Spiele“? Begründe mathematisch.