Universität Ulm
Gerhard Baur
Bianca Jaud

Übungen zum Seminar
Grundlagen der Mathematik
Blatt 6
Abgabe: Dienstag 24.11.2015

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es seien $n, m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion über n:
Es gibt Zahlen $q, r \in \mathbb{N}_0$ mit

$$n = qm + r,\ 0 \leq r < m.$$

Hinweis: Die Eindeutigkeit der Aussage wird in der Vorlesung gezeigt.

Aufgabe 2 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

(a) Erstellen Sie die Verknüpfungstabellen für $\oplus$ und $\odot$ in $\mathbb{Z}_7$.

(b) Der 24.11.2015 ist ein Dienstag. Berechnen Sie mit Hilfe der Modulo-Schreibweise auf welchen Wochentag der 24. November in den Jahren 2016 und 2017 fällt.

(c) Unsere kleine Klausur findet von heute aus gerechnet (24.11.2015) in 76 Tagen statt. Berechnen Sie mit Hilfe der Modulo-Schreibweise den Wochentag und das Datum, damit Sie die Klausur nicht verpassen.

Aufgabe 3 (2 + 2 + 2 + 2 = 8 Punkte)

(a) Gegeben sei eine Äquivalenzrelation R. Wir definieren die Relation $\tilde{R} := \{(a, b) \mid (b, a) \in R\}$. Zeigen Sie, dass auch $\tilde{R}$ eine Äquivalenzrelation ist.

Gegeben sei nun die Menge $M := \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid b \neq 0\}$ und die Äquivalenzrelation $\sim_{\mathbb{Q}}$ mit

$$(a, b) \sim_{\mathbb{Q}} (c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

(b) Zeigen Sie, dass $\sim_{\mathbb{Q}}$ eine Äquivalenzrelation ist.

(c) Geben Sie die Äquivalenzklassen $C_{(1,2)}$, $C_{(1,1)}$ und $C_{(2,1)}$ an und stellen Sie diese graphisch dar. Dabei ist $C_{(a,b)} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : (x, y) \sim (a, b)\}$.

(d) Wie kann man eine beliebige Äquivalenzklasse $C_{(a,b)}$ geometrisch beschreiben?
Hinweis: Wie würde das Bild aussehen, wenn man $C_{(a,b)}$ analog zu den Äquivalenzklassen in a) graphisch darstellt? Unterscheiden Sie die Fälle $a = 0$ und $a \neq 0$.

Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst, dass man keine Gelegenheit versäumen sollte, dieses Fachgebiet unterhaltsamer zu gestalten.
Blaise Pascal (1623 - 1662)