Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Attila Klimmek
Wintersemester 2016/17
Punktzahl: 25

Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 11.01.2017

Übungen Lineare Algebra 1: Blatt 10

43. Existiert eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit (2)

$$f(1,1,-3) = 9, \qquad f(-2,2,2) = 2, \qquad f(0,1,1) = -2?$$

Berechnen Sie, falls möglich, $f(3,-4,9)$.
Hinweis: Es darf ohne Begründung verwendet werden, dass

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} = -\frac{13}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{25}{8}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{11}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gilt und dass diese Darstellung eindeutig ist.

44. Sei K ein Körper und U, V, W endlich-dimensionale Vektorräume über K und $f : U \to V$ und $g : V \to W$ linear. Zeigen Sie die folgenden Aussagen: (3+3)

(i) $\dim \operatorname{Im}(g \circ f) \leq \min(\dim \operatorname{Im} g, \dim \operatorname{Im} f)$.

(ii) $\dim \operatorname{Ker}(g \circ f) \geq \dim \operatorname{Ker} f$.

45. Seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch (2+1+2)

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 \\ x_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 3x_3 \end{pmatrix}, \qquad g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 + x_3 \\ -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}.$$

(i) Seien die Basen $B = \big((1,1,1)^T, (1,1,0)^T, (1,0,0)^T\big)$ und $B' = \big((1,1,1,1)^T, (1,1,1,0)^T, (1,1,0,0)^T, (1,0,0,0)^T\big)$ des $\mathbb{R}^3$ bzw. des $\mathbb{R}^4$ gegeben. Finden Sie die Darstellungsmatrix der Abbildung f bezüglich B und B'.

(ii) Sei die Basis $C = \big((1,0,1)^T, (0,1,1)^T, (1,3,2)^T\big)$ des $\mathbb{R}^3$ gegeben. Finden Sie die Darstellungsmatrix der Abbildung g bezüglich der Basis C.

(iii) Berechnen Sie eine Basis von $\operatorname{Ker} f$ und $\operatorname{Im} f$. Ist f injektiv oder surjektiv?

46. Sei K ein Körper und V ein Vekttorraum über K mit $\dim V = n < \infty$. Sei $f : V \to V$ linear mit $f \circ f = f$. Zeigen Sie: (4+3)

(i) $V = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

(ii) Es gibt eine Basis $v_1, \dots, v_n$ von V, sodass die Darstellungsmatrix von f bezüglich dieser Basis gegeben ist durch

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && 1 &&& \\ &&& 0 && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& 0 \end{pmatrix}$$

47. Sei V die Menge aller reellwertigen Folgen, d.h. $V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R}\}$. Zusammen mit der komponentenweisen Addition und skalaren Multiplikation (2+1+1+1)

$$\begin{aligned} (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} &:= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots), && (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V, \\ \lambda \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} &:= (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots), && (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

bildet $(V, +, \cdot)$ einen Vektorraum (dies müssen Sie nicht zeigen).
Wir definieren die linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} L : V \to V, &\qquad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}, \\ R : V \to V, &\qquad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (0, a_1, a_2, a_3, \ldots). \end{aligned}$$

(i) Sei W ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und $g : W \to W$ linear. Zeigen Sie, dass g genau dann injektiv ist, wenn g surjektiv ist.

(ii) Zeigen Sie, dass L surjektiv, aber nicht injektiv ist.

(iii) Zeigen Sie, dass R injektiv, aber nicht surjektiv ist.

(iv) Wieso widerspricht dies nicht dem Resultat aus der Teilaufgabe (i)?