Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Attila Klimmek
Wintersemester 2016/17
Punktzahl: 27

Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 08.02.2017

Übungen Lineare Algebra 1: Blatt 14

59. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Eine Teilmenge $M = \{v_0, \dots, v_n\} \subset V$ heißt *Orthogonalbasis* von V, falls $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j} \langle v_i, v_j \rangle$ für alle $v_i, v_j \in M$ und M eine Basis von V ist (d.h. die Elemente von M haben nicht notwendigerweise Norm Eins). (1+1+1+5)

(i) Sei M eine Orthogonalbasis von V und $v \in V$. Zeigen Sie: Es gilt $v = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i$, wobei

$$\lambda_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}.$$

Wir betrachten im Folgenden den Raum $C[-1,1]$, versehen mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx$ und für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $P_k \subset C[-1,1]$ der Raum der Polynome vom Grad höchstens k über dem Intervall $[-1,1]$. Wir nennen ein Polynom $p \in P_k$ vom Grad k *normiert*, falls

$$p(x) = x^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i$$

gilt (d.h. der Koeffizient der höchsten Potenz von x ist Eins).
Wir bezeichnen Polynome $p_k \in P_k$ (wobei jedes p_k vom Grad k ist) mit der Eigenschaft

$$\langle p_i, p_j \rangle = \delta_{i,j} \langle p_i, p_j \rangle, \qquad i, j = 0, 1, \dots$$

als *Tschebyschow-Polynome.*[1]

(ii) Sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Zeigen Sie, dass die Tschebyschow-Polynome $p_0, \dots, p_k$ eine Orthogonalbasis von P_k sind.

(iii) Es gilt $\langle p_k, q \rangle = 0$ für alle $q \in P_{k-1}$.

(iv) Zeigen Sie, dass es eindeutig bestimmte normierte Tschebyschow-Polynome $p_k \in P_k, k \in \mathbb{N}_0$ gibt. Ferner gilt

$$p_k(x) = (a_k + x)p_{k-1}(x) + b_k p_{k-2}(x), \qquad k = 1, 2, \dots,$$

wobei $p_{-1}(x) = 0, p_0(x) = 1$ und

$$a_k = -\frac{\langle x p_{k-1}(x), p_{k-1}(x) \rangle}{\langle p_{k-1}(x), p_{k-1}(x) \rangle}, \qquad b_k = -\frac{\langle p_{k-1}(x), p_{k-1}(x) \rangle}{\langle p_{k-2}(x), p_{k-2}(x) \rangle}.$$

Hinweis: Um diese Aufgabe zu lösen, ist es nicht notwendig, zu integrieren. Die Axiome eines Skalarproduktes sind ausreichend.

60. Finden Sie eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{3,3}$, sodass $\overline{U}^T AU$ eine obere Dreiecksmatrix ist, wobei (5)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

61. Sei W ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und sei $U \subset W$ ein Untervektorraum. Wir definieren $U^\perp = \{w \in W : w \perp u \text{ für alle } u \in U\}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen: (1+4+4)

(i) $U^\perp$ ist ein Untervektorraum von W.

[1] In der Literatur sind auch die Bezeichnungen Tschebischow-, Tschebischof-, Tschebischoff-, Tschebyschew-, Tschebischew-, Tschebyscheff-, Tschebyschef-, Tschebischef-, Tschebischeff-, Tchebychev-, Tchebycheff-, Chebyshev-, Chebychow-, Chebychew-, Chebysheff-, Chebychov-, Chebyshov- und Čebyšëv-Polynome sehr gebräuchlich. Diese Liste ist keinesfalls erschöpfend.

(ii) Es gilt $W = U \oplus U^\perp$.
Hinweis: Betrachten Sie jeweils eine Orthonormalbasis von U und $U^\perp$.

Nach Teilaufgabe (iii) gibt es also zu jedem $w \in W$ eindeutige Vektoren $u_1 \in U$ und $u_2 \in U^\perp$ mit $w = u_1 + u_2$. Definiere nun die Abbildung $P_U : W \to U,\ w \mapsto u_1$. Wir bezeichnen diesen Vektor u_1 als die *orthogonale Projektion* von w auf U.

(iii) Sei $w \in W$ beliebig und im Folgenden fixiert und sei $u^* \in U$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
   (a) $\min_{u \in U} \|w - u\| = \|w - u^*\|$;
   (b) $u^* = P_U(w)$.

   Wie ist diese Aussage zu interpretieren?

Hinweis: Verwenden Sie die Aufgabe 56.

62. Wir nennen eine orthogonale Matrix $O \in \mathbb{R}^{n,n}$ *Drehmatrix*, falls $\det O = 1$ gilt und *Spiegelungsmatrix*, falls $\det O = -1$ gilt. (1+4)

(i) Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $O \in \mathbb{R}^{n,n}$ orthogonal. Zeigen Sie, dass 1 oder -1 ein Eigenwert von O ist.

(ii) Sei $F \subset \mathbb{R}^3$ ein Fußball mit Oberfläche $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^3$, dessen Mittelpunkt sich zu Beginn der ersten und zweiten Halbzeit im Ursprung $0 \in \mathbb{R}^3$ befindet. Zeigen Sie, dass es zwei Punkte $x_1, x_2 \in S$ gibt, die sich zu Beginn der ersten und zweiten Halbzeit am selben Ort des $\mathbb{R}^3$ befinden.
Sie dürfen davon ausgehen, dass alle (der endlich vielen) Bewegungen des Fußballes in der ersten Halbzeit gegeben sind durch eine Abbildung der Form $x \mapsto O_i x + b_i,\ i = 1, \dots, N \in \mathbb{N}$, wobei $O_i \in \mathbb{R}^{3,3}$ eine Drehmatrix ist und $b_i \in \mathbb{R}^3$ (d.h. in unserem Modell ist jede Bewegung des Fußballes gegeben durch eine Verschiebung und einer Drehung).