Die komplexen Zahlen (ein Abriss)

Vorbemerkung:

Wir wollen einen Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen konstruieren, in dem es ein Element $i \in \mathbb{C}$ gibt mit der Eigenschaft $i^2 = -1$. Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ soll darstellbar sein in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Die Operationen $+$ und $\cdot$ sollten verträglich sein mit diesen Vorstellungen. Dann sollte sein:

$$(x + iy) + (\xi + i\eta) = (x + \xi) + i(y + \eta) \text{ und}$$
$$(x + iy) \cdot (\xi + i\eta) = (x\xi - y\eta) + i(x\eta + y\xi).$$

Diese Konstruktion führen wir formal durch im folgenden

Satz:

Es sei $K = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}(= \mathbb{R}^2)$. Auf K definieren wir Operationen $+$ und $\cdot$ wie folgt:

$$(x, y) + (\xi, \eta) := (x + \xi, y + \eta);$$

$$(x, y) \cdot (\xi, \eta) := (x\xi - y\eta, x\eta + y\xi). \text{ Dann gilt:}$$

(i) Mit diesen Operationen ist K ein Körper.

(ii) $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ ist mit diesen Operationen ebenfalls ein Körper, der mit $\mathbb{R}$ identifiziert werden kann. In diesem Sinne ist K ein Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$.

(iii) Definieren wir $i := (0, 1) \in K$, so gilt für jedes $z = (x, y) \in K$ $z = (x, 0) + i(y, 0)$.

(iv) K kann nicht angeordnet werden.

Definition:

Wir schreiben anschließend $\mathbb{C}$ für diesen Körper K . i nennen wir die **imaginäre Einheit** in $\mathbb{C}$. Ist $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so heißt x der **Realteil** von z , i.Z. $x = Re\ z$ und y der **Imaginärteil** von z , i.Z. $y = Im\ z$.

Beweis des Satzes:

(i) Assoziativ-,Kommutativ - und Distributivgesetze sind elementar nachrechenbar (u.U etwas mühsam) und beruhen auf den entsprechenden Gesetzen in $\mathbb{R}$. Die Null ist $(0, 0)$, die Eins ist $(1, 0)$, das additiv Inverse zu (x, y) ist $(-x, -y)$ Das zu $(x, y) \neq (0, 0)$ Reziproke ist $(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2})$. (Letzteres ist motiviert durch die Rechnung $\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$.)

(ii) Klar: $(x,0) \in K \leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ ist eine strukturerhaltende Bijektion: $(x,0)+(y,0)=(x+y,0)$ und $(x,0)\cdot(y,0)=(xy,0)$.

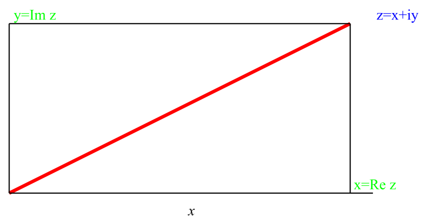
(iii) $(x,0)+(0,1)(y,0)=(x,y)$.

(iv) In angeordneten Körpern gilt: $z \neq 0 \Rightarrow z^2 > 0$, also müsste $1 = 1^2 > 0$ sein, andererseits auch $-1 = i^2 > 0$. Beides zusammen geht aber nicht.

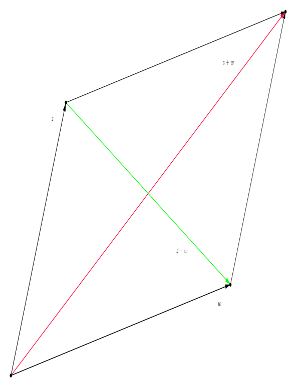
Bemerkungen:

(i) Praktisches Rechnen in $\mathbb{C}$, z.B. $\dfrac{1+2i}{3+4i} = \dfrac{(1+2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \dfrac{11+2i}{25} = \dfrac{11}{25} + \dfrac{2}{25}i$.

(ii) Wir können $\mathbb{C}$ veranschaulichen in der sogenannten **Gaußschen Zahlenebene** (C.F. Gauß, 1777-1855). Dabei identifizieren wir die komplexe Zahl $z = x+iy$ mit dem Punkt oder Vektor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:



Dann entspricht $-z$ dem Spiegelpunkt von z (bzgl. 0): Addition und Subtraktion entsprechen der vektoriellen Addition bzw. Subtraktion im $\mathbb{R}^2$.



$z-w$ zeigt also von w nach z .

Definition:

Es sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ (also $x, y \in \mathbb{R}$). Dann heißt

(i) $\bar{z} := x - iy$ die zu z **konjugiert komplexe Zahl** und

(ii) $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ der **Betrag** oder die **Länge** von z .

Bemerkungen:

(i) Zur Geometrie: $\bar{z}$ liegt spiegelbildlich zu z bezüglich der reellen Achse; $|z|$ ist die **Länge** des z repräsentierenden Vektors (Pythagoras).

(ii) $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$, und in diesem Fall stimmt die obige Definition von $|z|$ mit der Definition von $|x|$ in $\mathbb{R}$, überein. Dieser ist üblicherweise so definiert:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x \leq \end{cases}$$

Begründung: $|x|_{\text{komplex}} = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = |x|_{\text{reell}}$.

Satz (Rechenregeln für $\bar{z}$ und $|z|$):

Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

(i) $Re\ z = \dfrac{1}{2}(z + \bar{z})$; $Im\ z = \dfrac{1}{2i}(z - \bar{z})$;

(ii) $\bar{\bar{z}} = z$; $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$; $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ und $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$ $(w \neq 0)$.

(iii) $|\bar{z}| = |z|$; $|z|^2 = z\bar{z}$; $|z| \geq 0$ und $= 0 \iff z = 0$

(iv) $|zw| = |z||w|$ und $|z/w| = |z|/|w|$ $(w \neq 0)$.

(v) $|Re\ z| \leq |z|$ und $|Im\ z| \leq |z|$

(vi) $|z + w| \leq |z| + |w|$ und $|z + w| \geq \Big||z| - |w|\Big|$ (Dreiecksungleichung)

Beweis: Sei $z = x + iy,\ w = \xi + i\eta$.

(i) $z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x$ und $z - \bar{z} = x + iy - x + iy = 2iy$

(ii) $\bar{\bar{z}} = \overline{x - iy} = x + iy = z$;

$\overline{z + w} = \overline{(x + \xi + i(y + \eta)} = (x + \xi) - i(y + \eta) = \bar{z} + \bar{w}$;

$\overline{zw} = x\xi - y\eta - i(x\eta + y\xi) = \bar{z}\bar{w}$ und

$\overline{1/w} = \overline{\dfrac{\xi - i\eta}{\xi^2 + \eta^2}} = \dfrac{\xi + i\eta}{\xi^2 + \eta^2} = \dfrac{1}{\bar{w}}$

(iii) $|\bar{z}| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$; $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2 \geq 0$ und $= 0 \iff x = y = 0$

(iv) $|zw|^2 = zw(\overline{zw}) = zw\bar{z}\bar{w} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2$

(v) $|z|^2 = x^2 + y^2 \geq x^2$ und $\geq y^2$

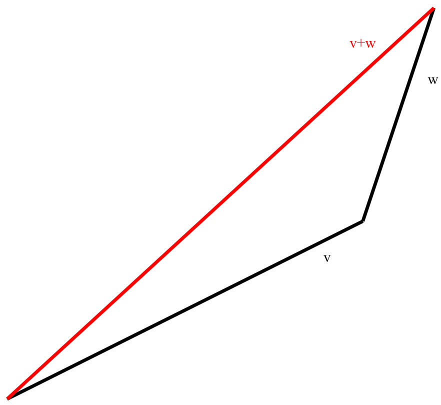
(vi) $|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z+w}) = z\bar{z}+z\bar{w}+w\bar{z}+w\bar{w} = z\bar{z}+z\bar{w}+\overline{z\bar{w}}+w\bar{w} = |z|^2+|w|^2+2Re\,(z\bar{w}) \underbrace{\leq}_{(v)} |z|^2+|w|^2+2|z||w| = (|z|+|w|)^2$. Dass aus dieser Dreiecksungleichung diejenige nach unten folgt, zeigen wir so:

$|z| = |z+w+w| \leq |z+w| + |-w| \Rightarrow |z+w| \geq |z| - |w|$ und

$|w| = |z+w-z| \leq |z+w| + |-z| \Rightarrow |z+w| \geq |w| - |z|$

Bemerkungen:

(i) Die Sprechweise "Dreiecksungleichung" ist in $\mathbb{C}$ gut verständlich: $z+w$ ist der direkte Weg von 0 nach $z+w$; erst den Weg nach z , zu wählen dann den nach w ist ein Umweg.



(ii) $z-w$ zeigt von w nach z . Daher ist $|z-w|$ interpretierbar als der Abstand zwischen z und w . Damit können wir Mengen der Form $K = \{z \in \mathbb{C} : |z-w| = r\}$ $(w \in \mathbb{C},\ r \in \mathbb{R},\ r > 0$ fest) interpretieren als Kreis mit Mittelpunkt w und Radius r , genauer die Kreislinie und $\{z \in \mathbb{C} : |z-w| < r\}$ als das Innere dieses Kreises.