Universität Ulm

Abgabe: -

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Attila Klimmek
Wintersemester 2016/17
Punktzahl: -

Lösungsvorschlag Lineare Algebra 1: Blatt 9

40. Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$.

(a) Wir definieren die Matrix

$$C := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Zeigen Sie, dass $\det C = \prod_{1 \le j < k \le n} (x_k - x_j)$ gilt.

Lösungsvorschlag:

Vorschlag 1 (mithilfe von Spaltenumformungen und einer Entwicklung nach der ersten Zeile): Wir zeigen die Behauptung per Induktion über n. Für $n = 1$ gibt es keine natürlichen Zahlen j, k mit der Eigenschaft $1 \le j < k \le n = 1$; deshalb ist das Produkt $\det C = \prod_{1 \le j < k \le 1} (x_k - x_j)$ leer und somit gleich 1. Andererseits besteht für $n = 1$ die Matrix C aber nur aus 1, weshalb auch $\det C = 1$ gilt.

Sei nun die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$ bewiesen und sei C die entsprechende Matrix mit $n+1$ Zeilen und $n+1$ Spalten. Von der letzten Spalte von C subtrahieren wir nun x_1 mal die vorletzte Spalte, von der vorletzten Spalte x_1 mal die vorvorletzte Spalte und so weiter; von der zweiten Spalte subtrahieren wir x_1 mal die ersten Spalte; lediglich die erste Spalte lassen wir gleich. Dadurch ändert sich die Determinante von C nicht, d.h. wir erhalten

$$\begin{aligned}
\det C &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \cdots & x_2^n - x_1 x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1 x_3 & \cdots & x_3^n - x_1 x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}^2 - x_1 x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^n - x_1 x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \cdots & x_2^n - x_1 x_2^{n-1} \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1 x_3 & \cdots & x_3^n - x_1 x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}^2 - x_1 x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^n - x_1 x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} (x_2 - x_1) \cdot 1 & (x_2 - x_1) \cdot x_2 & \cdots & (x_2 - x_1) \cdot x_2^{n-1} \\ (x_3 - x_1) \cdot 1 & (x_3 - x_1) \cdot x_3 & \cdots & (x_3 - x_1) \cdot x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_{n+1} - x_1) \cdot 1 & (x_{n+1} - x_1) \cdot x_{n+1} & \cdots & (x_{n+1} - x_1) \cdot x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \prod_{k=2}^{n+1} (x_k - x_1) \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{I.H.}}{=} \prod_{k=2}^{n+1} (x_k - x_1) \cdot \prod_{2 \le j < k \le n+1} (x_k - x_j) = \prod_{1 \le j < k \le n+1} (x_k - x_j).
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Vorschlag 2 (mithilfe des Identitätssatzes für Polynome): Wir zeigen die Behauptung per Induktion über n. Für $n = 1$ gibt es keine natürlichen Zahlen j, k mit der Eigenschaft $1 \le j < k \le n = 1$; deshalb ist das Produkt $\det C = \prod_{1 \le j < k \le 1} (x_k - x_j)$ leer und somit gleich 1. Andererseits besteht für $n = 1$ die Matrix C aber nur aus 1, weshalb auch $\det C = 1$ gilt.

Sei nun die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$ bewiesen und sei C die entsprechende Matrix mit $n+1$ Zeilen und $n+1$ Spalten. Wenn mindestens zwei der Zahlen $x_1, ..., x_{n+1}$ gleich sind, dann ist $\det C = 0$, weil zwei Zeilen der Matrix C übereinstimmen; zugleich gilt in diesem Fall aber auch $\prod_{1 \le j < k \le n+1}(x_k - x_j) = 0$, weil mindestens einer der Faktoren im Produkt gleich 0 ist. Also ist in diesem Fall die Behauptung bewiesen, und wir dürfen für den Rest die Induktionsschrittes annehmen, dass alle Zahlen $x_1, ..., x_{n+1}$ verschieden sind.

Wir betrachten nun eine Variable $t \in \mathbb{R}$ und die Matrix $C_t \in \mathbb{R}^{n+1,n+1}$, welche entsteht, indem wir in der letzten Zeile von C jedes x_{n+1} durch t ersetzen. Sei $p(t) := \det C_t$. Indem wir $\det C_t$ nach der letzten Zeile entwickeln, sehen wir, dass p ein Polynom vom Grade $\le n$ ist und dass der Koeffizient von t^n durch

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \overset{\text{I.H.}}{=} \prod_{1 \le j < k \le n} (x_k - x_j)$$

gegeben ist. Weil die x_j alle verschieden sind, ist diese Zahl nicht Null, d.h. der Grad von p ist gleich (und nicht nur kleiner gleich) n.

Nun betrachten wir das Produkt $\prod_{1 \le j < k \le n+1}(x_k - x_j)$ und ersetzen alle Vorkommnisse von x_{n+1} durch t; den so erhaltenen Ausdruck $\prod_{1 \le j < k \le n}(x_k - x_j) \prod(j = 1)^n (t - x_j)$ bezeichnen wir als $q(t)$. Man sieht, dass q ebenfalls ein Polynom vom Grad n ist und dass der Koeffizient von t^n ebenfalls gleich $\prod_{1 \le j < k \le n}(x_k - x_j)$ ist. Somit sind q und p zwei Polynome vom Grade n mit gleichem führenden Koeffizienten.

Wenn wir $p(t) = q(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ zeigen, folgt die Behauptung, denn dann gilt insbesondere

$$\det C = p(x_{n+1}) = q(x_{n+1}) = \prod_{1 \le j < k \le n+1} (x_k - x_j).$$

Um $p(t) = q(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ zu zeigen, benutzen wir den Identitätssatz für Polynome; laut diesem genügt es $p(x_m) = q(x_m)$ für alle $m \in \{1, ..., n\}$ zu zeigen, da die $x_1, ..., x_n$ alle verschieden sind. Sei also $m \in \{1, ..., n\}$.

Dann gilt $p(x_m) = \det C_{x_m} = 0$, da die letzte Zeile von C_{x_m} mit der m-ten Zeile übereinstimmt. Andererseits gilt $q(x_m) = \prod_{1 \le j < k \le n}(x_k - x_j) \prod_{j=1}^n (x_m - x_j) = 0$, da der m-te Faktor im hintenstehenden Produkt gleich 0 ist. Also haben wir tatsächlich $p(x_m) = q(x_m)$ für alle $m \in \{1, ..., n\}$ gezeigt und es folgt die Behauptung. $\square$

Vorschlag 3 (mithilfe einer Hilfsformel und einer Entwicklung nach der ersten Spalte): Zunächst beweisen wir die Hilfsaussage

$$\sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} \Big(\prod_{\substack{k \in \{1,\dots,n\} \\ k \ne m}} x_k \Big) \cdot \Big(\prod_{\substack{1 \le j < k \le n \\ j,k \ne m}} (x_k - x_j) \Big) = \prod_{1 \le j < k \le n} (x_k - x_j) \qquad (*)$$

per Induktion über n. Für $n = 1$ gilt

$$\sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} \Big(\prod_{\substack{k \in \{1,\dots,n\} \\ k \ne m}} x_k \Big) \cdot \Big(\prod_{\substack{1 \le j < k \le n \\ j,k \ne m}} (x_k - x_j) \Big) = \Big(\prod_{\substack{k \in \{1\} \\ k \ne 1}} x_k \Big) \cdot \Big(\prod_{\substack{1 \le j < k \le 1 \\ j,k \ne 1}} (x_k - x_j) \Big) = 1,$$

wobei die letzte Gleichheit gilt, weil beide Produkte leer sind. Zugleich ist auch das Produkt $\prod_{1 \le j < k \le n}(x_k - x_j)$ leer, also gleich 1.

Sei nun die Aussage $(*)$ bereits für ein $n \in \mathbb{N}$ bewiesen; wir wollen sie auch für die Zahl $n+1$ beweisen. Dazu sei $y_1 := x_1 - x_{n+1}$, ..., $y_n := x_n - x_{n+1}$. Man beachte, dass $y_k - y_j = x_k - x_j$

für alle $k, j \in \{1, ..., n\}$ gilt. Wir berechnen nun

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{n+1} (-1)^{m+1} \Big(\prod_{\substack{k \in \{1,\dots,n+1\} \\ k \neq m}} x_k \Big) \cdot \Big(\prod_{\substack{1 \leq j < k \leq n+1 \\ j,k \neq m}} (x_k - x_j) \Big) \\
= \quad & \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} \Big(\prod_{\substack{k \in \{1,\dots,n\} \\ k \neq m}} x_k \Big) \cdot x_{n+1} \cdot \Big(\prod_{\substack{1 \leq j < k \leq n \\ j,k \neq m}} (x_k - x_j) \Big) \cdot \Big(\prod_{\substack{j \in \{1,\dots,n\} \\ j \neq m}} (x_{n+1} - x_j) \Big) \\
& + (-1)^{n+2} \Big(\prod_{k \in \{1,\dots,n\}} x_k \Big) \cdot \Big(\prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_k - x_j) \Big) \\
= \quad & \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} \Big(\prod_{\substack{k \in \{1,\dots,n\} \\ k \neq m}} x_k \Big) \cdot (x_{n+1} - x_m) \cdot \Big(\prod_{\substack{1 \leq j < k \leq n \\ j,k \neq m}} (x_k - x_j) \Big) \cdot \Big(\prod_{\substack{j \in \{1,\dots,n\} \\ j \neq m}} (x_{n+1} - x_j) \Big) \\
& + \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} \Big(\prod_{\substack{k \in \{1,\dots,n\} \\ k \neq m}} x_k \Big) \cdot x_m \cdot \Big(\prod_{\substack{1 \leq j < k \leq n \\ j,k \neq m}} (x_k - x_j) \Big) \cdot \Big(\prod_{\substack{j \in \{1,\dots,n\} \\ j \neq m}} (x_{n+1} - x_j) \Big) \\
& + (-1)^{n+2} \Big(\prod_{k \in \{1,\dots,n\}} x_k \Big) \cdot \Big(\prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_k - x_j) \Big) =: a + b + c,
\end{aligned}
$$

wobei a den Ausdruck in der drittletzten Zeilen, b den Ausdruck in der vorletzten Zeile und c den Ausdruck in der letzten Zeile bezeichnet. Mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung erhalten wir

$$
\begin{aligned}
a &= \Big(\prod_{j \in \{1,\dots,n\}} (x_{n+1} - x_j) \Big) \cdot \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} \Big(\prod_{\substack{k \in \{1,\dots,n\} \\ k \neq m}} x_k \Big) \cdot \Big(\prod_{\substack{1 \leq j < k \leq n \\ j,k \neq m}} (x_k - x_j) \Big) \\
&\overset{\text{I.H.}}{=} \Big(\prod_{j \in \{1,\dots,n\}} (x_{n+1} - x_j) \Big) \cdot \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_k - x_j) = \prod_{1 \leq j < k \leq n+1} (x_k - x_j)
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
b &= \Big(\prod_{k \in \{1,\dots,n\}} x_k \Big) \cdot \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} \cdot \Big(\prod_{\substack{1 \leq j < k \leq n \\ j,k \neq m}} (x_k - x_j) \Big) \cdot \Big(\prod_{\substack{j \in \{1,\dots,n\} \\ j \neq m}} (x_{n+1} - x_j) \Big) \\
&= (-1)^{n-1} \cdot \Big(\prod_{k \in \{1,\dots,n\}} x_k \Big) \cdot \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} \cdot \Big(\prod_{\substack{1 \leq j < k \leq n \\ j,k \neq m}} (y_k - y_j) \Big) \cdot \Big(\prod_{\substack{j \in \{1,\dots,n\} \\ j \neq m}} y_j \Big) \\
&\overset{\text{I.H.}}{=} (-1)^{n-1} \Big(\prod_{k \in \{1,\dots,n\}} x_k \Big) \cdot \prod_{1 \leq j < k \leq n} (y_k - y_j) \\
&= (-1)^{n-1} \Big(\prod_{k \in \{1,\dots,n\}} x_k \Big) \cdot \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_k - x_j) = -c.
\end{aligned}
$$

Also folgt, wie behauptet,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{n+1} (-1)^{m+1} \cdot \Big(\prod_{\substack{k \in \{1,\dots,n+1\} \\ k \neq m}} x_k \Big) \cdot \Big(\prod_{\substack{1 \leq j < k \leq n+1 \\ j,k \neq m}} (x_k - x_j) \Big) \\
&= a + b + c = a = \prod_{1 \leq j < k \leq n+1} (x_k - x_j).
\end{aligned}
$$

Nun, da wir die Aussage $(*)$ gezeigt haben, beweisen wir die eigentliche Behauptung, und zwar ebenfalls per Induktion über n. Für $n = 1$ gibt es keine natürlichen Zahlen j, k mit der Eigenschaft $1 \leq j < k \leq n = 1$; deshalb ist das Produkt $\det C = \prod_{1 \leq j < k \leq 1} (x_k - x_j)$ leer und somit gleich 1. Andererseits besteht für $n = 1$ die Matrix C aber nur aus 1, weshalb auch $\det C = 1$ gilt.

Sei nun die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$ bewiesen und sei C die entsprechende Matrix mit $n+1$ Zeilen und $n+1$ Spalten. Für jedes $m \in \{1, ..., n+1\}$ bezeichnen wir mit $C_m \in \mathbb{R}^{n,n}$ die Matrix, welche aus C durch Streichen der ersten Spalte und der m-ten Zeile entsteht. In dem wir $\det C$ nach der ersten Spalte entwickeln, erhalten wir

$$\det C = \sum_{m=1}^{n+1} (-1)^{m+1} \cdot 1 \cdot \det C_m. \qquad (**)$$

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei nun $D_m \in \mathbb{R}^{n,n}$ die Diagonalmatrix mit den Einträgen $x_1, ..., x_{m-1}, x_m, ..., x_{n+1}$ und es sei $F_m \in \mathbb{R}^{n,n}$ gegeben durch

$$F_m = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{m-1} & x_{m-1}^2 & \cdots & x_{m-1}^{n-1} \\ 1 & x_{m+1} & x_{m+1}^2 & \cdots & x_{m+1}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

Dann ist $C_m = D_m F_m$, und zudem gilt laut Induktionsvoraussetzung für jedes $m \in \{1, ..., n+1\}$ die Formel

$$\det F_m = \prod_{\substack{1 \le j < k \le n+1 \\ j,k \neq m}} (x_k - x_j).$$

Also folgt

$$\begin{aligned} \det C &\overset{(**)}{=} \sum_{m=1}^{n+1} \det(D_m F_m) = \sum_{m=1}^{n+1} \det D_m \det F_m \\ &= \sum_{m=1}^{n+1} (-1)^{m+1} \prod_{\substack{k \in \{1,\dots,n+1\} \\ k \neq m}} x_k \prod_{\substack{1 \le j < k \le n+1 \\ j,k \neq m}} (x_k - x_j) \\ &\overset{(*)}{=} \prod_{1 \le j < k \le n+1} (x_k - x_j). \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. $\square$