Universität Ulm

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Alle Aussagen sind zu begründen!

Dr. Gerhard Baur
Dr. Jochen Glück
M. Sc. Attila Klimmek
Wintersemester 2016/17
Punktzahl: 100

Erste Klausur zur Linearen Algebra 1:

1. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen: (6×5)

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Menge aller ungeraden Permutationen in S_n ist eine Untergruppe von $(S_n, \circ)$ (wobei $\circ$ wie üblich die Hintereinanderausführung von Permutationen bezeichnet).

(b) Sei V ein Vektorraum über einen Körper K. Sind $u, v \in V$ linear unabhängig, so sind auch $u, u + v$ linear unabhängig.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Ist A^2 invertierbar, so ist auch A invertierbar.

(d) Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}$ ist diagonalisierbar.

(e) Sei $n \in \mathbb{N}$, seien V und W Vekorräume über $\mathbb{R}$ und sei $T : V \to W$ linear und surjektiv. Wenn für Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ die Gleichheit $\mathcal{LH}(v_1, \dots, v_n) = V$ gilt, dann ist $\mathcal{LH}(Tv_1, \dots, Tv_n) = W$.

(f) Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Menge der unitären Matrizen in $\mathbb{C}^{n,n}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{C}^{n,n}$.

2. Sei $t \in \mathbb{R}$ fest und seien die Vektoren $v_1, v_2, v_3, v \in \mathbb{R}^3$ durch (8)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} -6t \\ t^2 + 2t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

gegeben.

Zeigen Sie, dass es eindeutig bestimmte Skalare $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gibt, für welche $v = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k v_k$ gilt, und berechnen Sie diese Skalare in Abhängigkeit von t.

3. Betrachten Sie die Matrix (8+6)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A sowie die dazu gehörigen Eigenräume. Ist A diagonalisierbar?

(b) Berechnen Sie A^{10}.

4. Betrachten Sie die folgenden Untervektorräume des $\mathbb{R}^4$: (10)

$$U = \mathcal{LH}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad V = \mathcal{LH}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bestimmen Sie $\dim(U \cap V)$.

5. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ unitär. Ferner sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass $|\lambda| = 1$ gilt. (7)

Bitte umblättern!

6. Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. (5+5)

(a) Sei $U = \{A = (a_{jk}) \in \mathbb{R}^{n,n} \mid a_{jk} \geq 0$ für alle $j, k \in \{1, ..., n\}\}$. Ist U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n,n}$?

(b) Sei K ein Körper und sei $U = \{A \in K^{n,n} \mid \operatorname{tr} A = 0\}$. Ist U ein Untervektorraum von $K^{n,n}$?
Zur Erinnerung: Für eine Matrix $A = (a_{jk}) \in K^{n,n}$ ist $\operatorname{tr} A$ durch $\operatorname{tr} A := \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$ definiert.

7. Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch und sei die lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch $T(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gegeben. (7)

Zeigen Sie: Jeder Vektor aus dem Bild von T steht (bezüglich des kanonischen Skalarproduktes) senkrecht auf jedem Vektor aus dem Kern von T.

8. Es sei die lineare Abbildung (3+6+5)

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x + y + 3z \\ x + z \\ 2x - 2y - 6z \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass T den Rang 2 besitzt.

(b) Bestimmen Sie eine Basis b_1, b_2 des Bildes von T und ergänzen Sie diese zu einer Basis b_1, b_2, b_3 des $\mathbb{R}^3$.

(c) Seien e_1, e_2, e_3 die kanonischen Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^3$ und seien $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}^3$ die Vektoren aus Teilaufgabe (b). Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $A = A(T; e_1, e_2, e_3; b_1, b_2, b_3)$ von T.