Universität Ulm

Abgabe:

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Attila Klimmek
Wintersemester 2016/17
Punktzahl:

Lösungsvorschlag Lineare Algebra 1: Blatt 5

22. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Sie heißt *ungerade*, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Es bezeichne $\mathcal{F}_{\text{ger}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Menge aller geraden Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ und $\mathcal{F}_{\text{ung}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Menge aller ungeraden Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. (2+2)

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}_{\text{ger}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\mathcal{F}_{\text{ung}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ Untervektorräume von $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind.

Lösungsvorschlag: Offensichtlich ist die konstante 0-Funktion in $\mathcal{F}_{\text{ger}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ enthalten, d.h. es gilt $\mathcal{F}_{\text{ger}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \neq \emptyset$. Seien $f, g \in \mathcal{F}_{\text{ger}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$(\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x),$$

d.h. es ist $\lambda f + \mu g \in \mathcal{F}_{\text{ger}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Also ist $\mathcal{F}_{\text{ger}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ein Untervektorraum von $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Die konstante 0-Funktion ist auch in $\mathcal{F}_{\text{ung}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ enthalten, also gilt $\mathcal{F}_{\text{ung}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \neq \emptyset$. Seien $f, g \in \mathcal{F}_{\text{ung}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)(-x) &= \lambda f(-x) + \mu g(-x) = \lambda(-f(x)) + \mu(-g(x)) \\ &= -\big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big) = -(\lambda f + \mu g)(x),\end{aligned}$$

d.h. es ist $\lambda f + \mu g \in \mathcal{F}_{\text{ung}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Also ist $\mathcal{F}_{\text{ung}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ein Untervektorraum von $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. □

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die direkte Summe von $\mathcal{F}_{\text{ger}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\mathcal{F}_{\text{ung}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist.

Lösungsvorschlag: Sei $f \in \mathcal{F}_{\text{ger}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{F}_{\text{ung}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$f(x) = f(-x) = -f(x).$$

Somit folgt $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. f ist die konstante 0-Funktion. Also gilt $\mathcal{F}_{\text{ger}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{F}_{\text{ung}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{0\}$.
Wir müssen noch $\mathcal{F}_{\text{ger}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) + \mathcal{F}_{\text{ung}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ zeigen. Sei $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Wir definieren $g, h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ durch

$$g(x) := \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \quad \text{and} \quad h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt dann

$$\begin{aligned} g(x) + h(x) &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(-x) + \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}f(-x) = f(x), \\ g(-x) &= \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) = g(x) \\ \text{und} \qquad h(-x) &= \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = -\frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = -h(x). \end{aligned}$$

Also gilt $g + h = f$, sowie $g \in \mathcal{F}_{\text{ger}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $h \in \mathcal{F}_{\text{ung}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dies zeigt, dass tatsächlich $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{F}_{\text{ger}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) + \mathcal{F}_{\text{ung}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gilt. □

23. Sei V der Vektorraum über $\mathbb{R}$, den Sie in Aufgabe 15(ii) auf Blatt 4 betrachtet haben. Bestimmen Sie die Dimension von V. (2)

Lösungsvorschlag:

Behauptung: Es gilt $\dim V = 1$.

Beweis: Wir zeigen, dass der Vektor $2 \in V$ eine Basis von V bildet. Dazu genügt es laut Aufgabe 19(a) zu zeigen, dass 2 linear unabhängig ist und seine lineare Hülle gleich V ist.

Das neutrale Element in V ist gleich 1, also ist 2 nicht das neutrale Element von V. Ein einzelnes Element in einem Vektorraum, welches nicht gleich dem neutralen Element ist, ist aber immer linear unabhängig (dies folgt sofort aus Satz 10(ii)). Also ist 2 linear unabhängig.

Sei nun $x \in V$ beliebig. Wähle $\lambda := \log_2 x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\lambda \cdot 2 = 2^\lambda = 2^{\log_2 x} = x$. Also ist $V \subseteq \mathcal{LH}(\{2\})$. Die umgekehrte Inklusion $\mathcal{LH}(\{2\}) \subseteq V$ ist offensichtlich, also haben wir $V = \mathcal{LH}(\{2\})$ gezeigt. Aus Aufgabe 19(a) folgt somit, dass 2 eine Basis von V ist.

Wegen Satz 13 folgt daraus $\dim V = 1$. $\square$