ulm university universität uulm

Dr. Gerhard Baur
Erik Hintz
WS 2016/2017
24+4 Punkte

Lineare Algebra für Informatiker und Ingenieure
- Übungsblatt 10 -

Abgabe: Montag, den 9.1.2017 um 12:15 im Hörsaal innere Medizin

Übungsblätter bitte **zu zweit** abgeben!

Achtung: Es gibt auf der Vorlesungsseite noch ein ***Zusatzblatt*** *(auch abzugeben am 9.1.), auf dem 12 Zusatzpunkte erreicht werden können. Dieses enthält Aufgaben zu allen besprochenen Themen und ist eine sehr nützliche Übung für die Klausur.*

Wir wünschen allen Teilnehmerinnen und Teilnehmern frohe Weihnachten und einen guten Rutsch in das neue Jahr!

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Betrachte die Menge $A = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ mit den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

aus dem $\mathbb{R}^4$. Wir betrachten den Unterraum $U = \mathcal{LH}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ des $\mathbb{R}^4$.

Bestimme $\dim(U)$ und *drei verschiedene* Teilmengen $B \subset A$, die als Basis von U in Frage kommen.

Aufgabe 2: (9 Punkte)

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & (1+t) \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

für ein $t \in \mathbb{R}$ sowie die Vektoren

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne $\mathrm{rg}(A)$, $\ker(A)$ und die Lösungsmenge von $Ax = c$.

(b) Berechne $\mathrm{rg}(B)$, $\dim(\ker(B))$ und $\mathrm{rg}(B \mid d)$ sowie die Lösungsmenge von $By = d$ in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Bestimme in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ den Rang und die Dimension des Kerns der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2t & (t+1) & 1 & t \\ 10 & 8 & 6 & 2 & t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (4-t) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Seien $A \in \mathbb{K}^{m,n}$.

(a) Zeige mithilfe des Unterraumkriteriums, dass $\ker(A) = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\}$ einen Unterraum des $\mathbb{K}^n$ bildet.

(b) Angenommen $b \in \mathbb{K}^m$ ist derart, dass die Menge $L = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = b\}$, also die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$, nicht leer ist. Ist dann L auch ein Unterraum des K^n?

Aufgabe 5: (3 Punkte)
Von 3 Zahlen ist folgendes bekannt: Die Summe der 3 Zahlen ist 26. Die Summe aus dem Vierfachen der ersten Zahl und dem Dreifachen der zweiten Zahl und 21 ist das Fünffache der dritten Zahl. Die Hälfte der Summe aus der ersten Zahl und den Fünffachen der zweiten Zahl beträgt 22.5. Um welche Zahlen handelt es sich?

Aufgabe 6: (4 Bonuspunkte)
In Aufgabe 4 von Blatt 9 haben wir gesehen, dass die Menge der schiefsymmetrischen Matrizen $S = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} : A = -A^T\}$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^{n,n}$ ist. Wir betrachten nun die Menge der symmetrischen Matrizen, also

$$\hat{S} = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} : A = A^T\}.$$

(a) Zeige, dass auch $\hat{S}$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^{n,n}$ ist und gib eine Basis und Dimension von $\hat{S}$ an.

(b) Zeige, dass sich jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eindeutig als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymetrischen Matrix darstellen lässt.
Tipp: Direkte Summe.