Dr. Gerhard Baur
Erik Hintz
WS 2016/2017
24 Punkte

Lineare Algebra für Informatiker und Ingenieure
- Übungsblatt 12 -

Abgabe: Montag, den 23.1.2017 um 12:15 im Hörsaal innere Medizin

Übungsblätter bitte **zu zweit** abgeben!

Aufgabe 1: (8 Punkte)

(a) Berechne $\det(B)$ und $\det(C)$ für

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 18 & 8 & 13 \\ 1 & 5 & 13 & 7 & 16 \\ 1 & 3 & 11 & 7 & 10 \\ 1 & 3 & 11 & 11 & 16 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Betrachte die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ aus dem $\mathbb{R}^3$. Untersuche, ob diese drei Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(c) Berechne, falls möglich, die Inverse folgender Matrix A mithilfe von Satz 41:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: (10 Punkte)

(a) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Betrachte die Menge $SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) : \det(A) = 1\}$, also die Menge der regulären $n \times n$ Matrizen, deren Determinante 1 ist. Zeige, dass $SL_n(\mathbb{K})$ eine Gruppe bezüglich der gewöhnlichen Matrizenmultiplikation ist.

(b) Es seien AB und BA quadratische Matrizen. Gib zwei beliebige Beispiele für A und B an, so dass $\det(AB) \neq \det(BA)$ gilt und begründe, warum dies nicht dem Determinantenmultiplikationssatz (Satz 38) widerspricht.

(c) Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ heißt *nilpotent*, falls es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt, für die $A^k = 0$ gilt. Zeige, dass $\det(A) = 0$ für jede nilpotente Matrix A gilt.

(d) Es sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ und wir wissen, dass $\det(A + 2E) = -4$ und $\det(A - E) = 0$ gilt, wobei E die Einheitsmatrix bezeichnet. Was ist dann $\det(A^2 + A - 2E)$?

Dr. Gerhard Baur
Erik Hintz
WS 2016/2017
24 Punkte

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Gegeben sei die Matrix A und der Vektor b mit

$$A = \begin{pmatrix} t & 2 & -3 & -1 \\ 2t & t^2+5 & -7 & t \\ 0 & t^2+1 & 0 & 1 \\ t & t^2+3 & -4 & t-1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

für $t \in \mathbb{C}$. Für welche Werte $t \in \mathbb{C}$ ist das Gleichungssystem $Ax = b$ eindeutig lösbar? Bestimme die *zweite Komponente* des Lösungsvektors x in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{C}$.