



## Lineare Algebra für Informatiker und Ingenieure - Übungsblatt 12 -

Abgabe: Montag, den 23.1.2017 um 12:15 im Hörsaal innere Medizin  
Übungsblätter bitte **zu zweit** abgeben!

### Aufgabe 1: (8 Punkte)

- (a) Berechne  $\det(B)$  und  $\det(C)$  für

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 18 & 8 & 13 \\ 1 & 5 & 13 & 7 & 16 \\ 1 & 3 & 11 & 7 & 10 \\ 1 & 3 & 11 & 11 & 16 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

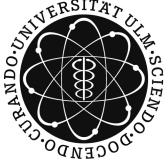
- (b) Betrachte die Vektoren  $v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$  und  $v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$  aus dem  $\mathbb{R}^3$ . Untersuche, ob diese drei Vektoren eine Basis des  $\mathbb{R}^3$  bilden.

- (c) Berechne, falls möglich, die Inverse folgender Matrix  $A$  mithilfe von Satz 41:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 2: (10 Punkte)

- (a) Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper. Betrachte die Menge  $SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) : \det(A) = 1\}$ , also die Menge der regulären  $n \times n$  Matrizen, deren Determinante 1 ist. Zeige, dass  $SL_n(\mathbb{K})$  eine Gruppe bezüglich der gewöhnlichen Matrizenmultiplikation ist.
- (b) Es seien  $AB$  und  $BA$  quadratische Matrizen. Gib zwei beliebige Beispiele für  $A$  und  $B$  an, so dass  $\det(AB) \neq \det(BA)$  gilt und begründe, warum dies nicht dem Determinantenmultiplikationssatz (Satz 38) widerspricht.
- (c) Eine Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n,n}$  heißt *nilpotent*, falls es eine Zahl  $k \in \mathbb{N}$  gibt, für die  $A^k = 0$  gilt. Zeige, dass  $\det(A) = 0$  für jede nilpotente Matrix  $A$  gilt.
- (d) Es sei  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  und wir wissen, dass  $\det(A + 2E) = -4$  und  $\det(A - E) = 0$  gilt, wobei  $E$  die Einheitsmatrix bezeichnet. Was ist dann  $\det(A^2 + A - 2E)$ ?



**Aufgabe 3: (6 Punkte)**

Gegeben sei die Matrix  $A$  und der Vektor  $b$  mit

$$A = \begin{pmatrix} t & 2 & -3 & -1 \\ 2t & t^2 + 5 & -7 & t \\ 0 & t^2 + 1 & 0 & 1 \\ t & t^2 + 3 & -4 & t - 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

für  $t \in \mathbb{C}$ . Für welche Werte  $t \in \mathbb{C}$  ist das Gleichungssystem  $Ax = b$  eindeutig lösbar? Bestimme die zweite Komponente des Lösungsvektors  $x$  in Abhängigkeit von  $t \in \mathbb{C}$ .