Dr. Gerhard Baur
Erik Hintz
WS 2016/2017
24 Punkte

Lineare Algebra für Informatiker und Ingenieure
- Übungsblatt 13 -

Abgabe: Montag, den 30.1.2017 um 12:15 im Hörsaal innere Medizin

Übungsblätter bitte **zu zweit** abgeben!

Aufgabe 1: (10 Punkte)

(a) Berechne für folgende Matrizen die Eigenwerte und Eigenräume. Untersuche, ob die angegebenen Matrizen diagonalisierbar sind und gib im positiven Falle sowohl die Transformationsmatrix S als auch die resultierende Diagonalmatrix an.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Berechne für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ die $n-$te Potenz der Matrix D, also D^n, für

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: (10 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Zeige:

(a) A ist genau dann nicht invertierbar, wenn 0 ein Eigenwert von A ist.

(b) Ist A invertierbar und $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von A, dann ist $\lambda \neq 0$, $\frac{1}{\lambda}$ ist ein Eigenwert von A^{-1} und $\mathrm{Eig}_A(\lambda) = \mathrm{Eig}_{A^{-1}}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$

(c) Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ Eigenwert von A, dann ist λ^k Eigenwert von A^k für alle $k \in \mathbb{N}$.

(d) Ist A nilpotent, d.h. es existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $A^m = 0$, dann hat A nur den Eigenwert 0.

(e) A^T besitzt die gleichen Eigenwerte wie A.

(f) Sind A und B ähnliche Matrizen, d.h. $\exists S \in GL_n(\mathbb{K})$ mit $B = S^{-1}AS$, dann haben A und B das gleiche charakteristische Polynom.
Tipp: Determinantenmultiplikationssatz

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Da bei der Datenübertragung (z.B. über verrauschte Kanäle) Fehler passieren, bedient man sich in vielen Anwendungen (z.B. auf einer Festplatte) einfacher Verfahren, die Fehler erkennen können. Ein Beispiel ist das sogenannte *Paritätsbit*: Sei $(w_1, \dots, w_n)^T \in \mathbb{Z}_2^n$ ein Wort (als Vektor geschrieben, bestehend aus 0en und 1en). Dann definiert man das Paritätsbit als

$$p = \sum_{i=1}^{n} w_i \mod 2$$

Dieses wird mit dem Wort $(w_1, \dots, w_n)^T$ mit übertragen. Tritt nur an einer Stelle ein Fehler auf (also genau ein *Bitflip*), so kann dieser erkannt werden. Bemerke, dass für Worte der Länge n genau die Hälfte der Worte zu $p = 1$ führen und die andere Hälfte zu $p = 0$. Diese Symmetrie ist eine wünschenswerte Eigenschaft, da dann Fehler mit einer Wahrscheinlichkeit 0.5 erkannt werden.
Wir betrachten im Folgenden nun eine Verfeinerung dieser Methode, die halb so aufwendig ist. Wir übermitteln nun gleich zwei Worte $(x_1, \dots, x_n)^T, (y_1, \dots, y_n)^T$ gleicher Länge und berechnen

$$c = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \mod 2$$

Wir wollen nun wissen, ob dieses Prüfbit auch die oben erwähnte Symmetrie erfüllt. Hierzu sei

$$a_n = |\{\text{Paare } ((x_1, \dots, x_n)^T, (y_1, \dots, y_n))^T \in \mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{Z}_2^n : \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \mod 2 = 0\}|$$

$$b_n = |\{\text{Paare } ((x_1, \dots, x_n)^T, (y_1, \dots, y_n))^T \in \mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{Z}_2^n : \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \mod 2 = 1\}|$$

also die Anzahl möglicher Wortpaare (bei dem beide Worte die Länge n haben), die zu $c = 0$ bzw. $c = 1$ führen.

(a) Zeige, dass $a_n = \frac{1}{2}\, 2^n + \frac{1}{2}\, 4^n$ und $b_n = -\frac{1}{2}\, 2^n + \frac{1}{2}\, 4^n$ gilt.
Tipp: Berechne zunächst a_1 und b_1 und überlege dir, wie man a_n und b_n als Rekursion aufschreiben kann (wie bei der Fibonacci Folge in der Vorlesung). Bestimme dann eine explizite Berechnungsformel für (a_n, b_n).

(b) Wie entwickelt sich der *Anteil* der Wortpaare mit $c = 0$ bzw. $c = 1$ für große n? Tritt die gewünschte Symmetrie auf oder nicht?