ulm university universität uulm

Dr. Gerhard Baur
Erik Hintz
WS 2016/2017
24+3 Punkte

Lineare Algebra für Informatiker und Ingenieure

- Übungsblatt 14 -

Abgabe: Montag, den 06.2.2017 um 12:15 im Hörsaal innere Medizin

Übungsblätter bitte **zu zweit** abgeben!

Wichtige Bemerkungen:
Dies ist das letzte reguläre Übungsblatt. Blatt 15 wird nur noch von denjenigen abgegeben, denen Punkte zur Vorleistung fehlen.
Die Vorleistung ist bestanden, wenn die Summe aller erreichten Übungspunkte mindestens 162.5 Punkte beträgt. Es ist **dringend** notwendig sich für die **richtige** Vorleistung ("Lineare Algebra für Informatiker (Vorleistung)", Prüfungsnummer 10893) **zeitnah** anzumelden. Erst wenn die Vorleistung im Hochschuldiensteportal als bestanden registriert wurde, kann man sich zu einer der Klausuren anmelden. Bitte beachtet, dass man sich spätestens **4 Tage vor** der Klausur (dies gilt auch für die Vorleistung, da diese ein Prüfungsdatum hat!) an- oder abgemeldet haben muss. Die Klausur ist offen, das heißt, man kann auch an der zweiten Klausur teilnehmen, wenn man an der ersten nicht teilgenommen hat. Als **Hilfsmittel** ist (nur) ein beidseitig **handschriftlich** beschriebenes Din A4 Blatt zugelassen. Diese und weitere Informationen sind auch der **Checkliste** auf der Vorlesungshomepage zu entnehmen.

Aufgabe 1: (6 Punkte)
Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ t & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mit Parameter $t \in \mathbb{R}$.
Berechne in Abhängigkeit vom Parameter t die Eigenwerte und Eigenräume von A.
Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist A diagonalisierbar? Bestimme für diese t eine Matrix S und eine Diagonalmatrix Λ, sodass $S^{-1}AS = \Lambda$.

Aufgabe 2: (5 Punkte)
Wir betrachten im $\mathbb{R}^3$ die drei Punkte $A = (2, 1, 1)$, $B = (2, 2, 1)$ und $C = (1, 1, \sqrt{2} + 1)$. Diese drei Punkte sollen die **Eckpunkte** eines Dreiecks beschreiben. Bezeichne mit α den Innenwinkel, der bei der Ecke A liegt, mit β den Innenwinkel, der bei B liegt und mit γ den Innenwinkel der bei C liegt. Es ist üblich, die Punkte mit Großbuchstaben zu bezeichnen, und die Seiten mit Kleinbuchstaben. Als Konvention hat die Seite, die gegenüber eines Punktes P liegt, den Buchstaben p (z.B. ist die Seite a gerade die Seite gegenüber von A, also die Seite, die nur die Punkte B und C als Ecke hat).
Berechne sowohl die drei Seiten**längen** der Seiten a, b und c als auch die drei Innenwinkel α, β und γ.

Aufgabe 3: (9 Punkte)

(a) In der Vorlesung wurden die ersten Schritte des Gram - Schmidt Verfahrens erläutert. Verallgemeinere dieses Verfahren zu einem Algorithmus für eine beliebige Anzahl Vektoren! *Hinweis: Zur Vereinfachung soll der Algorithmus hier eine **Basis** aus n Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ als Eingabe haben und schließlich eine Orthonormalbasis $b_1, \ldots, b_n$ des selben Raumes ausgeben.*

(b) Gegeben sei $U = \mathcal{LH}(v_1, v_2, v_3)$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestimme eine Orthonormalbasis von U.

(c) Gegeben sei $U = \mathcal{LH}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimme eine Orthonormalbasis und die Dimension von U.

Aufgabe 4: (4 Punkte + 3 Zusatzpunkte)

Sei V ein reeller endlichdimensionaler Vektorraum und U ein Unterraum von V. Wir bezeichnen mit

$$U^{\perp} = \{v \in V : u \cdot v = 0 \ \forall u \in U\}$$

das *orthogonale Komplement* von U. Hier bedeutet $\cdot$ einfach das euklidische Skalarprodukt, also $u \cdot v = u^T v$. Das orthogonale Komplement hat viele schöne Eigenschaften, die wir im Folgenden zeigen:

(a) Zeige, dass $U^{\perp}$ ein Unterraum von V ist.

(b) Zeige, dass $U \cap U^{\perp} = \{0\}$ ist.

(c) Zeige, dass $V = U \oplus U^{\perp}$ gilt. *(3 Zusatzpunkte für Teil (c))*

Bemerkung: Die Resultate machen intuitiv auch Sinn. In $U^{\perp}$ sind gerade die Vektoren von V enthalten, die zu allen Vektoren in U senkrecht stehen - das ist also (salopp gesprochen) der Unterraum, der senkrecht zu U ist.
Übrigens gibt es nach Satz 24 in der Vorlesung nun für $v \in V$ eine eindeutige Zerlegung $v = u + u^{\perp}$ mit $u \in U$ und $u^{\perp} \in U^{\perp}$. Man kann zeigen (das tun wir aber nicht), dass u in gewissem Sinne der Vektor in U ist, der v "am nächsten ist". Dies ist zum Beispiel dann interessant, wenn man Näherungslösungen für nicht lösbare Gleichungssysteme finden möchte.