Dr. Gerhard Baur
Erik Hintz
WS 2016/2017
24+5 Punkte

Lineare Algebra für Informatiker und Ingenieure
- Übungsblatt 3 -

Abgabe: Montag, den 7.11.2016 um 12:15 im Hörsaal innere Medizin
Übungsblätter bitte **zu zweit** abgeben!

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Es seien die folgenden Mengen gegeben:

$A = \{$Sachsen, Brandenburg, Sachsen-Anhalt, Nordrhein-Westfalen, Schleswig-Holstein, Thüringen$\}$

$B = \{$Kiel, Köln, Dresden, Leipzig, Magdeburg, Erfurt, Düsseldorf, Potsdam, Hannover, Jena$\}$

Die Funktion $f : A \to B$ weise jedem Element aus A (Bundesland) ihre Landeshauptstadt zu. Die Funktion $g : B \to A$ weise jeder Stadt aus B ihr Bundesland zu.

(a) Entscheide (und begründe), ob die Funktionen f, g injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv sind.

(b) Bestimme $f(\{$Sachsen, Nordrhein-Westfalen, Sachsen-Anhalt $\})$, $f^{-1}(\{$Potsdam, Kiel$\})$, $g(\{$ Leipzig, Dresden, Jena$\})$, $g^{-1}(\{$Sachsen, Nordrhein-Westfalen$\})$

Aufgabe 2: (4 Punkte)

1. Gegeben sei die Zuordnungsvorschrift $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2}$

   (a) Finde größtmögliche Teilmengen $M, N \subset \mathbb{R}$, sodass $f : M \to N, x \mapsto \frac{1}{x^2}$ eine Funktion ist.

   (b) Finde größtmögliche Teilmengen $M, N \subset \mathbb{R}$, sodass $f : M \to N, x \mapsto \frac{1}{x^2}$ surjektiv ist.

   (c) Finde größtmögliche Teilmengen $M, N \subset \mathbb{R}$, sodass $f : M \to N, x \mapsto \frac{1}{x^2}$ injektiv ist.

   (d) Finde größtmögliche Teilmengen $M, N \subset \mathbb{R}$, sodass $f : M \to N, x \mapsto \frac{1}{x^2}$ bijektiv ist.

   Begründe deine Antwort, formale Beweise sind hier allerdings nicht notwendig.

2. Gegeben sei die Zuordnungsvorschrift $f : \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}) \to \{0, 1, 2, 3, 4\}, A \to |A|$.

   (a) Ist f eine Funktion?

   (b) Ist f injektiv?

   (c) Ist f surjektiv?

   (d) Ist f bijektiv?

   Begründe deine Antwort, formale Beweise sind hier allerdings nicht notwendig.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Es seien $f : A \to B$ eine Funktion sowie $B_1, B_2 \subset B$ und $A_1, A_2 \subset A$.

(a) Man zeige, dass
$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

(b) Man zeige, dass
$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$$

(c) Gilt in Teil b) auch Gleichheit? Falls ja, beweise dies, falls nicht, finde ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ beide bijektiv.
Zeige: Dann ist $g \circ f : A \to C$ bijektiv und es gilt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Aufgabe 5: (8 Punkte)

(a) Untersuche, welche der folgenden Relationen auf der Menge A Äquivalenzrelationen sind. Gib, wenn möglich, auch die Äquivalenzklassen an.

i) Sei A die Menge aller Menschen und $a \sim b :\Leftrightarrow a$ und b haben ein gemeinsames Kind.

ii) Sei A die Menge aller Menschen und $a \sim b :\Leftrightarrow a$ und b haben dieselbe Mutter.

iii) Sei $A = \mathbb{Z}$ und $a \sim b :\Leftrightarrow a - b$ ist durch 3 teilbar.

iv) Sei $A = \mathbb{R}$ und $a \sim b :\Leftrightarrow a = b^2$

(b) Sei $A \neq \emptyset$ eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A. Definiere die Relation $\sim^*$ auf A via
$$a \sim^* b :\Leftrightarrow b \sim a$$
Zeige, dass auch $\sim^*$ eine Äquivalenrelation auf A ist.

Bemerkung: Die folgende Aufgabe ist eine Zusatzaufgabe. Diese wird nicht zur Berechnung der Vorleistungsgrenze benutzt, erreichte Punkte werden jedoch dem Übungspunktekonto gutgeschrieben.

Aufgabe 6: (5 Bonuspunkte)
Gegeben sei die Menge $M = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : b \neq 0\}$ und die Relation $\sim_{\mathbb{Q}}$ mit
$$(a, b) \sim_{\mathbb{Q}} (c, d) :\Leftrightarrow ad = bc$$

(a) Zeige, dass $\sim_{\mathbb{Q}}$ eine Äquivalenrelation auf M ist.

(b) Wie kann eine beliebige Äquivalenzklasse $C(a, b) = \{(x, y) \in M : (x, y) \sim_{\mathbb{Q}} (a, b)\}$ (mathematisch) beschrieben werden?
Gib konkret die Äquivalenzklassen $C(1, 2)$ und $C(2, 1)$ an und stelle diese graphisch dar.