Dr. Gerhard Baur
Erik Hintz
WS 2016/2017
24 Punkte

Lineare Algebra für Informatiker und Ingenieure
- Übungsblatt 4 -

Abgabe: Montag, den 14.11.2016 um 12:15 im Hörsaal innere Medizin

Übungsblätter bitte **zu zweit** abgeben!

Aufgabe 1: (13 Punkte)
Man prüfe, ob $(G, \circ)$ eine Halbgruppe, Gruppe oder abelsche Gruppe ist:

(a) $G = \mathbb{Z}$ und $a \circ b = a + b - 5$

(b) $G = \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $a \circ b = a + b$

(c) $G = \mathbb{R}^3$ und mit $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $a \circ b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

(d) $G = \mathbb{R}$ und $a \circ b = \dfrac{a+b}{2}$

(e) $G = \{f \mid f \text{ Funktion mit } f : X \to X\}$ auf einer nichtleeren Menge X und $\circ$ als die Komposition von Funktionen

(f) $G = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$ und $a \circ b = ab - a - b + 2$

Aufgabe 2: (5 Punkte)
Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. *Beweise:*

(a) Für $a, b \in G$ besitzt die Gleichung $x \circ a = b$ genau eine Lösung, nämlich $x = b \circ a^{-1}$

(b) Für $a \in G$ ist $(a^{-1})^{-1} = a$

(c) Für $a, b \in G$ ist $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$

Aufgabe 3: (3 Punkte)
Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $U \subset G$. $(U, \circ)$ heißt Untergruppe von G, falls es ebenfalls eine Gruppe ist. *Zeige:*

$$(U, \circ) \text{ Untergruppe von } (G, \circ) \Leftrightarrow U \neq \emptyset \text{ und } \forall a, b \in U \text{ gilt } a \circ b^{-1} \in U$$

Aufgabe 4: (3 Punkte)
Gegeben seien die Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Bestimme $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$ und $\sigma^3 := \sigma \circ \sigma \circ \sigma$.