Dr. Gerhard Baur
Erik Hintz
WS 2016/2017
24 Punkte

Lineare Algebra für Informatiker und Ingenieure

- Übungsblatt 5 -

Abgabe: Montag, den 21.11.2016 um 12:15 im Hörsaal innere Medizin

Übungsblätter bitte **zu zweit** abgeben!

Aufgabe 1: (7 Punkte)
Gegeben seien die Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne $\sigma \circ \tau$, τ^{-1}, σ^{-1}, $\tau^{-1} \circ \sigma^{-1}$ und $(\sigma \circ \tau)^{-1}$.

(b) Löse die Gleichung $\sigma \circ x = \tau$ und $y \circ \sigma = \tau$ für $x, y \in S_5$.

(c) Wieviele Inversionen hat τ?

(d) Schreibe σ als Produkt von Transpositionen.

(e) Berechne $\text{sign}(\sigma)$, $\text{sign}(\tau)$, $\text{sign}(\sigma^{-1})$ und $\text{sign}(\sigma^{-1} \circ \tau)$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Betrachte für ein $n \in \mathbb{N}$ die Menge A_n der *geraden* Permutationen und die Menge B_n der *ungeraden* Permutationen.

(a) Zeige, dass $(A_n, \circ)$ eine Gruppe ist, wobei $\circ$ die Komposition von Permutationen bedeutet.

(b) Ist $(B_n, \circ)$ auch eine Gruppe? Begründe!

(c) Zeige, dass es auf der Menge $\{1, \dots, n\}$ genauso viele gerade wie ungerade Permutationen gibt, m.a.W. zeige, dass $|A_n| = |B_n|$.
Hinweis: Es darf ohne Beweis benutzt werden, dass zwei endliche Mengen genau dann gleich viele Elemente haben, wenn eine Bijektion zwischen ihnen existiert.

Aufgabe 3: (3 Punkte)
Eine Permutation $\sigma \in S_n$ heißt $k-$Zyklus, falls paarweise verschiedene Zahlen $a_1, \dots, a_k \in \{1, \dots, n\}$ existieren, so dass

- $\sigma(a_1) = a_2, \sigma(a_2) = a_3, \dots, \sigma(a_{k-1}) = a_k, \sigma(a_k) = a_1$,
- $\sigma(b) = b$ für alle $b \notin \{a_1, \dots, a_k\}$

erfüllt ist.

(a) Finde ein Beispiel für einen solchen Zyklus im Fall $n = 5$ und $k = 3$.

(b) Zeige: Ist σ ein $k-$Zyklus, so gilt $\sigma^k = \varepsilon$ und $\sigma^l \neq \varepsilon$ für alle l mit $1 \leq l < k$, wobei ε die Identität bedeutet.

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Sei K ein Körper und $a, b, c, d \in K$ mit $bcd \neq 0$. Zeige die *Doppelbruchregel*, also

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

Aufgabe 5: (7 Punkte)

(a) Zeichne folgende Mengen in der Gaußschen Zahlenebene

$$A := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$$
$$B := \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 1\}$$
$$C := \{z \in \mathbb{C} : |z + i| = |z - 1|\}$$

(b) Bestimme Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:

$$(1 - 2i)(3 + 3i), \ \frac{3 + 3i}{1 - 2i}, \left(\frac{\sqrt{2}}{1 - i}\right)^4 \text{ und } i^{2016}$$

(c) Löse die Gleichung $|z| - z = 1 + 2i$ in $\mathbb{C}$.

(d) Zeige, dass für zwei komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gilt, dass

$$2\left(|z|^2 + |w|^2\right) = |z + w|^2 + |z - w|^2$$