Dr. Gerhard Baur
Erik Hintz
WS 2016/2017
24+3 Punkte

Lineare Algebra für Informatiker und Ingenieure

- Übungsblatt 6 -

Abgabe: Montag, den 28.11.2016 um 12:15 im Hörsaal innere Medizin

Übungsblätter bitte **zu zweit** abgeben!

Aufgabe 1: (3 Punkte)

Wir definieren die Quersumme einer Zahl als die Summe ihrer Ziffern, also für eine Zahl $a = a_k a_{k-1} \dots a_0$ mit Ziffern $a_i \in \{0, \dots, 9\}$ für $i \in \{0, \dots, k\}$ ist $Q(a) = \sum_{i=0}^{k} a_i$.
Zeige die Quersummenregel, zeige also, dass eine Zahl $a \in \mathbb{N}$ genau dann durch 3 teilbar ist, wenn $Q(a)$ durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 2: (8 Punkte)

(a) Der 24. Dezember 2016 fällt auf einen Samstag. Bestimmte mithilfe von Modulo-Schreibweise den Wochentag des 24. Dezember 2017! Welches sind die beiden nächsten Jahre, in denen der 24. Dezember wieder auf einen Samstag fällt?

Um Probleme wie obiges einfacher zu lösen, befassen wir uns im Folgenden mit einer geschlossenen Formel, um Wochentage zu berechnen. Ein "Ewiger Kalender" ist eine Formel, nach der man aus dem Datum bezüglich des Gregorianischen Kalenders den Wochentag bestimmen kann. Eine erste Festlegung setzt den Beginn eines Jahres auf den 1. März, da somit ein eventueller Schalttag am Ende des Jahres liegt.
Die Gregorianische Kalenderreform fand 1582 statt. Es wurde festgesetzt, dass ab dem Jahr 1600 jedes vierte Jahr ein Schaltjahr ist, jedes 100. Jahr aber nicht und jedes 400. Jahr dagegen wieder. Wir ordnen jedem der sieben Wochentage eine Zahl zu, die Wochentagszahl. Dabei beginnen wir mit dem Sonntag von 0 ab zu zählen, fortlaufend bis zum Samstag mit der 6. Weiter sei a_0 die Wochentagszahl des 1. März 1600.

(b) Es sei $t \in \mathbb{N}_0$ und es bezeichne $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner gleich x. Begründe, dass für a_t, die Wochentagszahl des 1. März des Jahres $1600 + t$ folgende Formel gilt:

$$a_t \equiv a_0 + t + \left\lfloor \frac{t}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{t}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{t}{400} \right\rfloor \bmod 7$$

(c) Bestimme a_0 anhand des 1. März 2016, welcher ein Dienstag war.

(d) Welche Darstellung für a_t erhalten wir, wenn wir die Zahl t in Teilaufgabe (b) in der Form $t = 100c + d$ mit $c, d \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq d < 100$ schreiben? Benutze diese Darstellung, um den Wochentag des 1. März 1992 zu bestimmen.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Erstelle die Verknüpfungstabellen für $\oplus$ und $\odot$ in $\mathbb{Z}_7$.

Aufgabe 4: (9 Punkte)

(a) Überprüfe, ob folgende Mengen V Vektorräume über dem Körper $\mathbb{R}$ mit der üblichen skalaren Multiplikation und Addition sind:

(i) $V = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 0\}$ mit $n \in \mathbb{N}$

(ii) Menge der Polynome von Grad $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$V = \{P(x) : P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_j \in \mathbb{R} \text{ für } i = 0, \ldots, n \text{ und } a_n \neq 0\}$$

(iii) $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 \in \mathbb{Q}\}$

(b) Es sei $V = (0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $u, v \in V$ definieren wir

$$u \oplus v := uv \text{ und } \lambda \odot u = u^\lambda$$

Ist $(V, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$? Beweise/Widerlege!

Aufgabe 5: (3 Zusatzpunkte)

Es seien V_1 und V_2 reelle Vektorräume. Weiter seien $P := \{(v_1, v_2) : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ und eine Addition über $(v_1, v_2) + (w_1, w_2) := (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$ für alle $(v_1, v_2), (w_1, w_2) \in P$ sowie eine skalare Multiplikation über $\alpha \cdot (v_1, v_2) := (\alpha v_1, \alpha v_2)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $(v_1, v_2) \in P$ gegeben.
Zeige: $(P, +, \cdot)$ ist ein reeller Vektorraum.