Lineare Algebra für Informatiker und Ingenieure

- Übungsblatt 7 -

Abgabe: Montag, den 5.12.2016 um 12:15 im Hörsaal innere Medizin

Übungsblätter bitte **zu zweit** abgeben!

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Welche der folgenden Mengen sind im Vektorraum $(V, K, +, \cdot)$ linear unabhängig?

(a) $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ in $V = \mathbb{R}^3$ über $K = \mathbb{R}$

(b) $B = \{x^3 + 2, x^2 - x, x^2 + 1, 3\}$ im Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 über $K = \mathbb{R}$

(c) $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1-i \end{pmatrix} \right\}$ in $V = \mathbb{C}^3$ über $K = \mathbb{C}$

(d) Die Menge C aus Teil (c) mit $V = \mathbb{C}^3$, diesmal über $K = \mathbb{R}$

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Bestimme Dimension und eine Basis folgender Vektorräume:

(a) $\mathbb{C}^2$ über $\mathbb{R}$

(b) $\mathbb{C}^2$ über $\mathbb{C}$

(c) $(V, \oplus, \odot)$ von Blatt 6, Aufgabe 4b über $\mathbb{R}$

Hinweis: Es darf vorausgesetzt werden, dass es sich tatsächlich um Vektorräume handelt; die Basiseigenschaft ist jeweils nachzuweisen.

Aufgabe 3: (7 Punkte)

Es sei $(V, K, +, \cdot)$ ein Vektorraum. Beweise oder widerlege folgende Aussagen:

(a) Sind v_i, v_j für $i \neq j$ (und $i, j \in \{1, ..., n\}$) paarweise linear unabhängige Vektoren aus V , so sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig.

(b) Es seien $v_1, \dots, v_n \in V$ und es gebe $i \neq j$ aus $\{1, \dots, n\}$ mit $v_i = v_j$. Dann sind $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig.

(c) Es seien drei Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in V$ gegeben, welche sich als Linearkombinationen von zwei Vektoren w_1, w_2 schreiben lassen. Dann sind v_1, v_2, v_3 linear abhängig.

(d) Es seien $u, v, w \in V$ linear unabhängig. Dann sind $w + u, 5v + 3w + u$ und $v + 2w + 4u$ linear abhängig, falls $K = \mathbb{R}$.

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Sei $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in K^2$ für einen Körper K. Definiere für $\lambda \neq 0$

$$v^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}, w^* = \begin{pmatrix} y_1 \\ \lambda y_2 \end{pmatrix}, \tilde{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \tilde{w} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}, \hat{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + \lambda x_1 \end{pmatrix}, \hat{w} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 + \lambda y_1 \end{pmatrix}$$

Zeige:

$$v, w \text{ l.u. } \Leftrightarrow v^*, w^* \text{ l.u. } \Leftrightarrow \tilde{v}, \tilde{w} \text{ l.u. } \Leftrightarrow \hat{v}, \hat{w} \text{ l.u.}$$

Tipp: Es ist möglicherweise einfacher, dies über lineare Abhängigkeit zu beweisen.

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Sei $V = \mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$. Betrachte die folgenden Vektoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) Zeige, dass v_1, v_2, v_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ darstellen.

(b) Kann w_1 in diese Basis hineingetauscht werden?
Kann w_2 in diese Basis hineingetauscht werden?
Begründe und gib im positiven Falle jeweils alle möglichen resultierenden Basen an.

(c) Können sowohl w_1 als auch w_2 gleichzeitig in die Basis hineingetauscht werden?
Begründe und gib im positiven Fall eine mögliche Basis an.