Dr. Gerhard Baur
Erik Hintz
WS 2016/2017
21+3 Punkte

Lineare Algebra für Informatiker und Ingenieure
- Übungsblatt 8 -

Abgabe: Montag, den 12.12.2016 um 12:15 im Hörsaal innere Medizin

Übungsblätter bitte **zu zweit** abgeben!

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Begründe jeweils, ob U ein Untervektorraum des reellen Vektorraums V ist:

(a) $V = \mathbb{R}^4,\ U = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \right\}$

(b) $V = \mathbb{R}^n,\ U = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : x_1 - x_2 = x_n \right\}, n \geq 2$ beliebig

(c) $V = \mathbb{R}^2,\ U = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 0 \right\}$

(d) $V = \mathbb{R}^3,\ U = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \right\}$

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Es sei V ein reeller Vektorraum und U_1, U_2 Unterräume von V.

(a) Zeige: Im allgemeinen ist $U_1 \cup U_2$ kein Unterraum.

(b) Zeige: Es ist $U_1 \cup U_2$ genau dann ein Unterraum, wenn $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$ gilt.

(c) Aus der Vorlesung wissen wir, dass $U_1 + U_2$ ein Unterraum ist. Zeige nun, dass $U_1 + U_2$ der kleinste Unterraum von V ist, der $U_1 \cup U_2$ enthält, zeige also, dass für einen beliebigen Unterraum $U \subset V$, der $U_1 \cup U_2$ enthält, gilt, dass $U_1 + U_2 \subset U$.

Aufgabe 3: (7 Punkte)

(a) Es seien U_1 und U_2 Unterräume des $\mathbb{R}^5$ mit $\dim(U_1) = \dim(U_2) = 3$. Welche der nachfolgenden Fälle sind möglich, welche unmöglich? Die Antwort ist zu begründen.

(i) $\dim(U_1 \cap U_2) = 2$

(ii) $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$

(iii) $\dim(U_1 + U_2) = 4$

(b) Sei V ein $\mathbb{K}$ Vektorraum und $U_i, i = 1, 2, 3$ Unterräume von V. ~~Zeige~~ Widerlege folgende Dimensionsformel:

$$\begin{aligned}\dim(U_1 + U_2 + U_3) = &\dim(U_1) + \dim(U_2) + \dim(U_3) - \dim(U_1 \cap U_2) - \dim(U_1 \cap U_3) \\ &- \dim(U_2 \cap U_3) + \dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3)\end{aligned}$$

(c) Betrachte nochmals Aufgabe 3)c) von Blatt 7, seien also drei Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in V$ gegeben, welche sich als Linearkombination zweier Vektoren w_1, w_2 schreiben lassen. Wie kann nun mithilfe der Unterraumtheorie bewiesen werden, dass dann v_1, v_2, v_3 linear abhängig sind?
Tipp: Dies geht in einer oder zwei Zeilen.

Aufgabe 4: (7 Punkte)
Gegeben seien folgende Unterräume des $\mathbb{R}^4$:

$$U_1 = \mathcal{LH}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\3\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$U_2 = \mathcal{LH}\left(\begin{pmatrix}3\\6\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

Bestimme jeweils eine Basis und Dimension von U_1, U_2 sowie $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$.