Dr. Gerhard Baur
Erik Hintz
WS 2016/2017
24 Punkte

Lineare Algebra für Informatiker und Ingenieure

- Übungsblatt 9 -

Abgabe: Montag, den 19.12.2016 um 12:15 im Hörsaal innere Medizin

Übungsblätter bitte **zu zweit** abgeben!

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Gegeben seien folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \hat{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \hat{L} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1-i & 1+2i & 3i & 1+2i & i \\ 1 & 1+i & 1 & 2 & -1 \\ 1-i & 1-i & 1 & 1 & -1 \\ 2-2i & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-i & i & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ i & -i & 2i \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 1+i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechne, falls möglich, $AB, BA, \hat{B}\hat{A}, BC, D\hat{L}, \hat{D}L, (AB)C, F^2 - 2F + E$ und $(GH)J$ wobei $F^2 = FF$ und E die Einheitsmatrix bezeichnet.

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$. Zeige oder Widerlege:

(a) $AB = 0 \Leftrightarrow A = 0$ oder $B = 0$

(b) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Leftrightarrow AB = BA$

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Für $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ist die Spur von A ist definiert als $\mathrm{Spur}(A) := \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu\nu}$.

(a) Berechne $\mathrm{Spur}(B)$ für die Matrix B aus Aufgabe 1.

(b) Es seien $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$. Zeige:

  (i) $\mathrm{Spur}(A+B) = \mathrm{Spur}(A) + \mathrm{Spur}(B)$

  (ii) $\mathrm{Spur}(\lambda A) = \lambda \cdot \mathrm{Spur}(A)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$

  (iii) $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$

(c) Es sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Zeige: Es gibt keine Matrix $X \in \mathbb{C}^{n,n}$ mit $AX - XA = E$, wobei E die Einheitsmatrix bezeichnet.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\mathbb{R}^{n,n}$ ein Vektorraum ist. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt *schiefsymmetrisch*, falls $A = -A^T$ gilt. Betrachte nun

$$S = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} : A = -A^T\},$$

also die Menge der schiefsymmetrischen Matrizen.

(a) Zeige, dass S ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^{n,n}$ ist.

(b) Gib eine Basis und die Dimension von S im Fall $n = 3$ an.

(c) Bestimme eine Basis und die Dimension von S für allgemeines $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Betrachte den $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ mit Standardbasis.

(a) Eine Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden kann beschrieben werden durch die Abbildung

$$T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Durch welche Matrix wird diese Abbildung beschrieben?

(b) Betrachte den Punkt $P = (-1, 2)$ und Menge $G = \left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\}$, welche eine Gerade beschreibt.
Bestimme die Spiegelung von P und G an der 1. Winkelhalbierenden. Zeichne zusätzlich P und G in ein Koordinatensystem und führe diese Spiegelung graphisch durch.

(c) Bezeichne mit T_2 die Abbildung, die einen Vektor an der zweiten Winkelhalbierenden spiegelt. Gib *sowohl* die Abbildungsvorschrift (wie sie in (a) gegeben ist) an *als auch* die Matrix, die diese darstellt.

(d) Wir wollen nun einen Punkt zuerst an der 1. Winkelhalbierenden und anschließend an der 2. Winkelhalbierenden spiegeln. Die dazugehörige Abbildung nennen wir T_3. Bestimme durch Berechnung einer geeigneten Komposition von Abbildungen die Abbildungsvorschrift von T_3 und anhand dieser die Darstellungsmatrix von T_3. Wie kann man die Darstellungsmatrix von T_3 einfacher bekommen? Tu dies, und verifiziere dein Ergebnis.

(e) Was bedeutet die in Teil (d) beschriebene Abbildung T_3 geometrisch?