Lösung Blatt 6, Aufgabe 5

Es seien V_1 und V_2 reelle Vektorräume. Weiter seien $P := \{(v_1, v_2) : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ und eine Addition über $(v_1, v_2) + (w_1, w_2) := (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$ für alle $(v_1, v_2), (w_1, w_2) \in P$ sowie eine skalare Multiplikation über $\alpha \cdot (v_1, v_2) := (\alpha v_1, \alpha v_2)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $(v_1, v_2) \in P$ gegeben.
Zeige: $(P, +, \cdot)$ ist ein reeller Vektorraum.

Lösungsvorschlag:
Wir prüfen die Vektorraumaxiome nach:

- Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v = (v_1, v_2) \in P$ ist $\lambda \cdot v = (\lambda v_1, \lambda v_2) \in P$, da $\lambda v_1 \in V_1$ und $\lambda v_2 \in V_2$
- Wir zeigen, dass $(P, +)$ eine abelsche Gruppe ist:

  (G1) Für $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in P$ ist $v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \in P$, da $v_1 + w_1 \in V_1$ und $v_2 + w_2 \in V_2$.

  (G2) Für $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in P$ gilt

  $$\begin{aligned} u + (v + w) &= (u_1, u_2) + ((v_1, v_2) + (w_1, w_2)) = (u_1, u_2) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \\ &= (u_1 + v_1 + w_1, u_2 + v_2 + w_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) + (w_1, w_2) = (u + v) + w \end{aligned}$$

  (G3) Das Paar von Nullvektoren $0 = (0_1, 0_2)$ liegt in P weil $0_1 \in V_1$ und $0_2 \in V_2$, da ja V_1 und V_2 Vektorräume sind. Dieses ist das neutrale Element von P, da für $v = (v_1, v_2) \in P$ gilt, dass $v + 0 = (v_1, v_2) + (0_1, 0_2) = (v_1 + 0_1, v_2 + 0_2) = (v_1, v_2) = v$

  (G4) Für $v = (v_1, v_2) \in P$ ist auch $-v = (-v_1, -v_2) \in P$, da V_1 und V_2 Vektorräume sind. Nun ist $-v$ das zu v inverse Element, da $v + (-v) = (v_1, v_2) + (-v_1, -v_2) = (0_1, 0_2) = 0$

  (G5) Für $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in P$ ist $v+w = (v_1+w_1, v_2+w_2) = (w_1+v_1, w_2+v_2) = w+v$, da $(V_1, +)$ und $(V_2, +)$ abelsche Gruppen bilden.

  Damit ist also $(P, +)$ eine abelsche Gruppe.

- Es bleiben die Rechengesetze zu zeigen. Seien dazu $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in P$.
  - Assoziativgesetz:

    $$\lambda \cdot (\mu \cdot v) = \lambda \cdot (\mu v_1, \mu v_2) = (\lambda\mu v_1, \lambda\mu v_2) = (\lambda\mu)(v_1, v_2) = (\lambda\mu) \cdot v$$

  - 1. Distributivgesetz:

    $$(\lambda+\mu) \cdot v = ((\lambda+\mu)v_1, (\lambda+\mu)v_2) = (\lambda v_1+\mu v_1, \lambda v_2+\mu v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2)+(\mu v_1, \mu v_2) = \lambda \cdot v+\mu \cdot v$$

  - 2. Distributivgesetz:

    $$\begin{aligned} \lambda \cdot (v + w) &= \lambda \cdot ((v_1, v_2) + (w_1, w_2)) = \lambda \cdot (v_1 + w_1, v_2 + w_2) = (\lambda(v_1 + w_1), \lambda(v_2 + w_2)) \\ &= (\lambda v_1 + \lambda w_1, \lambda v_2 + \lambda w_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2) + (\lambda w_1, \lambda w_2) = \lambda \cdot (v_1, v_2) + \lambda(w_1, w_2) \\ &= \lambda \cdot v + \lambda \cdot w \end{aligned}$$

  - Unitaritätsgesetz:

    $$1 \cdot (v_1, v_2) = (1v_1, 1v_2) = (v_1, v_2) = v$$

  Hier wurde jeweils benutzt, dass V_1 und V_2 Vektorräume sind, die jeweiligen Gesetze also komponentenweise gelten.

- Insgesamt handelt es sich also bei $(P, +, \cdot)$ um einen reellen Vektorraum.