Lösung Blatt 8, Aufgabe 3b

Sei V ein $\mathbb{K}$ Vektorraum und $U_i, i = 1, 2, 3$ Unterräume von V. Zeige folgende Dimensionsformel:

$$\begin{aligned}\dim(U_1 + U_2 + U_3) = &\dim(U_1) + \dim(U_2) + \dim(U_3) - \dim(U_1 \cap U_2) - \dim(U_1 \cap U_3) \\ &- \dim(U_2 \cap U_3) + \dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3)\end{aligned}$$

Lösungsvorschlag:
Leider ist die Dimensionsformel **falsch**, wie man an folgendem Gegenbeispiel sehen kann:

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{R}^2 \\ U_1 &= \{t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\} \\ U_2 &= \{t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\} \\ U_3 &= \{t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Dann ist $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \{0\}$ und $U_1 + U_2 + U_3 = \mathbb{R}^2$. Allerdings ist

$\dim(U_1) + \dim(U_2) + \dim(U_3) - \dim(U_1 \cap U_2) - \dim(U_1 \cap U_3) - \dim(U_2 \cap U_3) + \dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) = 3$

und

$$\dim(U_1 + U_2 + U_3) = 2$$

Mein Fehler liegt im Beweis von $(U_1 + U_2) \cap U_3 = U_1 \cap U_3 + U_2 \cap U_3$. Das ist nämlich **falsch**:
Ist $x \in (U_1 + U_2) \cap U_3$, so existieren $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$ sodass $x = u_1 + u_2$ und $x \in U_3$. Allerdings folgt aus $x = u_1 + u_2 \in U_3$ **nicht**, dass $u_1 \in U_3$ und $u_2 \in U_3$

Ich werde diese Aufgabe aus der Wertung nehmen, sodass es in Blatt 8 insgesamt 21 Punkte gab.