Dr. Gerhard Baur
Erik Hintz
WS 2016/2017
12 **Zusatz**punkte

Lineare Algebra für Informatiker und Ingenieure
- Zusatzblatt -

Abgabe: Montag, den 9.1.2017 um 12:15 im Hörsaal innere Medizin

Bitte mit Blatt 10 zusammengetackert abgeben.

Bemerkung: Dieses Blatt ist ein reines Zusatzblatt zur Wiederholung des bisher behandelten Stoffes (kein Anspruch auf Vollständigkeit!). Die Punkte dienen zur Aufbesserung der Übungspunkte. Dieses Blatt ist eine sehr gute Übung für die Klausur. Sollte das Blatt abgeben werden, dann bitte mit Blatt 10 zusammentackern.

Aufgabe 1: (1 Zusatzpunkt)
Sei $A = \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. Definiere die Relation $\sim$ auf A via $x \sim y \;:\Leftrightarrow x$ und y linear abhängig.
Zeige, dass es sich bei $\sim$ um eine Äquivalenzrelation handelt!
Warum muss der Nullvektor ausgeschlossen werden?

Aufgabe 2: (3 Zusatzpunkte)

(a) Betrachte die Menge $k\mathbb{Z} = \{\dots, -2k, k, 0, k, 2k, \dots\}$ für ein festes $k \in \mathbb{N}$. Zeige, das $(k\mathbb{Z}, +)$ eine Gruppe bildet, wobei $+$ die gewöhnliche Addition bedeutet.

(b) Gegeben sei eine Gruppe $(G, \circ)$ und zwei Untergruppen U_1 und U_2 von G. Zeige, dass dann $U_1 \cup U_2$ im Allgemeinen keine Gruppe ist.
Tipp: Man kann Teil a) verwenden

(c) Betrachte die Menge $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Zeige, dass $(G, \cdot)$ eine Gruppe ist, wobei $\cdot$ die gewöhnliche Multiplikation komplexer Zahlen bedeutet.

Aufgabe 3: (2 Zusatzpunkte)
Sei $V = \mathbb{C}^3$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und betrachte die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Sind u, v, w linear unabhängig?

(b) Betrachte den Unterraum $U = \mathcal{LH}(v, w, 2w + v)$ von V. Gib eine Basis von U an.

(c) Erweitere $\{u, v, w\}$ zu einer Basis von V.

Aufgabe 4: (3 Zusatzpunkte)

Zeige folgende Aussagen:

Bemerkung: Zwar mag das Wort Zeige *den einen oder anderen abschrecken, die folgenden Aussagen lassen sich allerdings in wenigen Zeilen begründen :)*

(a) Sei V ein Vektorraum mit $\dim(V) < \infty$ und seien U_1 und U_2 Unterräume von V mit $\dim(V) < \dim(U_1) + \dim(U_2)$. Zeige, dass dann $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$.

(b) Sei V ein Vektorraum mit $\dim(V) < \infty$ und U_1 ein Unterraum von V. Zeige: Es gibt einen Unterraum U_2 von V mit $V = U_1 \oplus U_2$

(c) Sei $A \in \mathbb{K}^{l,m}$ und $B \in \mathbb{K}^{m,n}$ Matrizen. Zeige, dass dann $\ker(B) \subset \ker(AB)$

Aufgabe 5: (1 Zusatzpunkt)

Begründe jeweils, ob U ein Untervektorraum des reellen Vektorraums V ist:

(a) $V = \mathbb{R}^3,\ U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$

(b) $V = \mathbb{R}^3,\ U = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 4x_1 + 2x_3 = 0 \right\}$

Aufgabe 6: (2 Zusatzpunkte)

Betrachte den $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ mit Standardbasis.

Bezeichne mit T_1 die Abbildung, die eine Spiegelung an der y Achse verursacht und mit T_2 die Abbildung, die eine Drehung um $90°$ im Uhrzeigersinn verursacht. Bestimme die Matrixdarstellung von T_1 und T_2. Bestimme rechnerisch die Matrixdarstellungen von $T_1 \circ T_2$ und $T_2 \circ T_1$. Was bedeuten die Abbildungen $T_1 \circ T_2$ und $T_2 \circ T_1$ geometrisch?

Wir wünschen Euch allen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr 2017!