Dr. Gerhard Baur
Erik Hintz
WS 2016/2017
0 Punkte

Lineare Algebra für Informatiker und Ingenieure
Extrablatt

Keine Abgabe.

Bemerkung:
Auf diesem Blatt sind ein paar zusätzliche Übungsaufgaben, die vorallem Stoff nach dem letzten Extrablatt behandeln. Aufgaben, die mit einem * gekennzeichnet sind, behandeln Stoff, der nur für die zweite Klausur relevant ist - dennoch sind sie eine gute Übung!
Dieses Blatt gibt nur zusätzliche Aufgaben und hat keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit - klausurrelevant sind alle Blätter gleichermaßen.

Aufgabe 1:
Sei M eine beliebige Menge und $G := \mathcal{P}(M)$, also die Potenzmenge von M. Zeige, dass es sich bei $(G, \circ)$, wobei $A \circ B := A \setminus B \cup B \setminus A$ um eine abelsche Gruppe handelt. Die Assoziativität von $\circ$ darf dabei als gegeben vorausgesetzt werden.

Aufgabe 2:
Zeige oder widerlege:

(a) Für zwei quadratische Matrizen gilt stets $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$

(b) Die Summe zweier invertierbarer Matrizen ist invertierbar.

(c) *Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ schiefsymmetrisch, d.h. $A^T = -A$. Dann ist A diagonalisierbar.

(d) Die Menge $G = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} : \det(A) = -1\}$ bildet eine Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation

Aufgabe 3:

(a) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $\det(B) \neq 0$. Zeige, dass dann AB und BA die selben Eigenwerte haben.

(b) Von einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ wissen wir, dass $A^2 + A$ den Eigenwert -1 hat. Zeige, dass dann A^3 den Eigenwert 1 hat.

(c) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrische Matrizen, d.h. $A = A^T$ und $B = B^T$. Zeige: $AB = BA \Leftrightarrow AB$ symmetrisch.

(d) Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ orthogonal. Zeige, dass dann $||v||^2 + ||w||^2 = ||v + w||^2$.

(e) Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und λ Eigenwert von A mit algebrarischer Vielfachheit n. Zeige: Falls A *nicht* eine Diagonalmatrix mit λ auf der Diagonalen (und ansonsten 0en) ist, dann ist A *nicht* diagonalisierbar.

(f) Betrachte die Permutation $P \in S_n$ mit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Zeige, dass dann $inv(P) = \dfrac{n(n-1)}{2}$, wobei $inv(P)$ die Anzahl der Fehlstandspaare von P bezeichnet.
Hinweis: Man darf benutzen, dass $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Aufgabe 4:
Berechne den Eintrag x_3 der Lösung $x \in \mathbb{C}^4$ von $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2+2i & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3-4i & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4,4} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$$

und bringe das Ergebnis auf die Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5:

(a) Gegen sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a + b + c \\ x_1 + x_2 &= 2c \\ x_2 + x_3 &= 2a \end{aligned}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Zeige, dass das LGS eindeutig lösbar ist und bestimme die Lösung.

(b) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -t & 1 & -3t \\ t & 2 & 1 \\ 2t & 4 & t+1 \end{pmatrix}$$

mit Parameter $t \in \mathbb{R}$ sowie die Vektoren

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(i) Berechne $\operatorname{rg}(A), \operatorname{rg}(A \mid b), \dim(\ker(A)), \ker(A)$ sowie die Lösungsmenge von $Ax = b$.

(ii) Berechne $\operatorname{rg}(B), \operatorname{rg}(B \mid c), \dim(\ker(B)), \ker(B)$ sowie die Lösungsmenge von $By = c$ in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Der Fall $t = 0$ ist hier also insbesondere **nicht** zu berücksichtigen.)

(iii) Sei nun $t = 0$. Ist dann $By = c$ lösbar? Falls dem so ist, berechne die Lösungsmenge, falls dem nicht so ist, begründe dies.

Aufgabe 6:
Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\beta \neq 0$.

(a) Bestimme die Eigenwerte und Eigenräume von A in Abhängigkeit von α und β.

(b) Ist A diagonalisierbar? Gib im positiven Falle eine reguläre Matrix S und eine Diagonalmatrix Λ an, sodass $S^{-1}AS = \Lambda$ gilt.

(c) *Ist A sogar unitär diagonalisierbar? Führe im positiven Falle eine unitäre Diagonalisierung durch, d.h. bestimme eine unitäre Matrix U, sodass $\bar{U}^T AU = \Lambda$ gilt.

Wir wünschen allen Teilnehmerinnen und Teilnehmern viel Erfolg bei den Prüfungen und alles Gute für die Zukunft.