ulm university universität ulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Jun.-Prof. PD Dr. Delio Mugnolo
delio.mugnolo@uni-ulm.de

Dr. Arthur Gerber
arthur.gerber@uni-ulm.de

Übungen - Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Abgabe: bis Donnerstag, 5.6.2014, 12:10 Uhr in H3

(25 Punkte entsprechen 100%)

18. Gegeben seien die folgenden Funktionen auf $\mathbb{R}$:

$$u_1(t) = 1,\ u_2(t) = t^2,\ u_3(t) = (1+t)^2\ ,$$
$$v_1(t) = t^2,\ v_2(t) = t^2 + 1,\ v_3(t) = 1\ ,$$
$$w_1(t) = t^2,\ w_2(t) = t^2 \operatorname{sgn}(t)$$

   (a) Bestimme jeweils die Wronski-Determinate von u_1, u_2, u_3 bzw. v_1, v_2, v_3 bzw. w_1, w_2.

   (b) Was lässt sich nur mit Teil (a) über die lineare Unabhängigkeit von $\{u_1, u_2, u_3\}$, $\{v_1, v_2, v_3\}$ bzw. $\{w_1, w_2\}$ aussagen?

   (c) Gib an, welche der Mengen $\{u_1, u_2, u_3\}$, $\{v_1, v_2, v_3\}$ bzw. $\{w_1, w_2\}$ linear abhängig bzw. unabhängig sind.

(5+3+2 Punkte)

19. Seien $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ stetig auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und $n \geq 2$. Weiter seien $u_1, u_2, \ldots u_n : I \to \mathbb{R}$ Lösungen der homogenen Gleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0\ .$$

Die Wronski-Determinante für $t \in I$ lautet:

$$\det V(t) := \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \ldots & u_n(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \ldots & u_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) & u_2^{(n-1)}(t) & \ldots & u_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Zeige:

   (a) Die Ableitung der Determinante einer Matrix $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1,\ldots,n}$ lautet

$$\frac{d}{dt}(\det A(t)) = \det \begin{pmatrix} a_1'(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2'(t) \\ a_3(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \end{pmatrix} + \ldots + \det \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \\ a_n'(t) \end{pmatrix}\ .$$

Dabei ist $a_i = (a_{i1} a_{i2} \dots a_{in})$ die i-te Zeile der Matrix A.

(Hinweis: Nutze die Leibniz-Formel als Definition der Determinante.)

(b) Die Wronski-Determinante erfüllt die Differenzialgleichung

$$\frac{d}{dt}(\det V(t)) + a_{n-1}(t) \det V(t) = 0 \ .$$

(4+8 Punkte)

20. *(inhomogene DGL höherer Ordnung)* Seien $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und $n \geq 2$. Die Funktionen $u_1, u_2, \dots u_n : I \to \mathbb{R}$ seien ein Fundamentalsystem der Lösungen der homogenen Gleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t) y'(t) + a_0(t) y(t) = 0 \ .$$

Weiter genügen die differenzierbaren Funktionen $c_1, \dots c_n : I \to \mathbb{R}$ dem System

$$\begin{pmatrix} u_1(t) & u_2 & \dots & u_n \\ u_1'(t) & u_2' & \dots & u_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) & u_2^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \ .$$

Zeige, dass durch

$$x(t) := \sum_{i=1}^{n} c_i(t) u_i(t)$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t) y'(t) + a_0(t) y(t) = f(t) \ .$$

gegeben ist.

(Hinweis: Schreibe zunächst die Matrixgleichung in Komponenten aus.)

(8 Punkte)

Noch einige Hinweise zur Vorleistung:

- Insgesamt werden 70 Punkte (Blatt 1-5) zum Bestehen der Vorleistung benötigt!
- Meldet euch rechtzeitig (unabhängig davon, ob ihr die benötigten Punkte schon habt) zur Vorleistung an!