



Übungen - Gewöhnliche Differenzialgleichungen

keine Abgabe

Fakultät für Mathematik und
Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Jun.-Prof. PD Dr. Delio Mugnolo
delio.mugnolo@uni-ulm.de

Dr. Arthur Gerber
arthur.gerber@uni-ulm.de

21. Sei $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Die Matrix S_{ij} entsteht durch Streichen der i -ten Zeile und j -ten Spalte der Matrix A . Wir setzen die Zahl

$$A_{ij} := (-1)^{i+j} \det S_{ij}$$

und die Matrix

$$\text{adj}(A) := ((A_{ij})_{i,j=1,\dots,n}) .$$

Zeige:

(a) $(\det A) \cdot E = A \cdot \text{adj}(A)^T$ ($E = E_n$ ist die Einheitsmatrix)

(b) Für $A \in C^1(I; M_n(\mathbb{R}))$ gilt die sogenannte *Jacobi-Formel*:

$$(\det A)'(t) = \sum_{i,j=1}^n a'_{ij}(t) \cdot A_{ij}(t) = \text{Spur}(A'(t) \cdot \text{adj}(A)^T(t))$$

22. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A \in C^1(I; M_n(\mathbb{R}))$ und $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^n$ Lösungen von

$$\mathbf{u}'(t) = A(t)\mathbf{u}(t) \quad t \in I .$$

(a) Zeige mit Hilfe der Jacobi-Formel und Aufgabe 21(a), dass die Wronski-Determinante $W(t)$ von $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^n$ die gewöhnliche Differenzialgleichung

$$y'(t) = y(t)\text{Spur}A(t)$$

erfüllt.

(b) Sind $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^n$ linear unabhängige Lösungen, so gilt für beliebiges $t_0 \in I$:

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \text{Spur}(A(s)) ds\right)$$

23. (a) Bestimme die allgemeine Lösung von $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = e^t$.
(Hinweis: Errate zunächst Lösungen der assoziierten homogenen Gleichung.)
(b) Löse das Cauchy-Problem $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = e^t$, $y'(0) = y(0) = 0$.