Differenzialgleichungen

Delio Mugnolo

(delio.mugnolo@uni-ulm.de)

Dies ist das Skript zur Vorlesung *Gewöhnliche Differenzialgleichungen*, welche ich im Sommersemester 2014 an der Universität Ulm gehalten habe. Die Aufgaben und ihre Lösungshinweise im Kapitel 6 stammen dagegen meistens vom Assistent und Übungsleiter der Vorlesung, Herrn Dr. Arthur Gerber.

Dank der Fördermitteln des Ministeriums für Wissenschaft, Forschung und Kunst Baden–Württemberg im Rahmen des "Lehrprogramm Juniorprofessur" wurde ich bei der Verfassung dieses Skriptes von Herrn Michael Schelling unterstützt. Trotz seines sorgfältigen Korrekturlesens ist durchaus möglich, dass ich im Text Fehler vergessen habe. Ich werde jedem/jeder dankbar sein, der/die mich darauf hinweisen wird – am besten direkt an `delio.mugnolo@uni-ulm.de`.

Ulm, den 12. Juni 2014 Delio Mugnolo

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Was sind Differenzialgleichungen?

Betrachtet man eine Bevölkerung (Menschen, Bakterien, usw.), so kann man ansatzweise realistisch annehmen, dass (zumindest für kleine Zeitschritte Δt) die Steigerung der Größe der Bevölkerung proportional zu Δt und zur Anfangsgröße ist, etwa

$$P(t + \Delta t) - P(t) = \gamma \Delta t P(t).$$

Für immer kleiner werdende Zeitschritte Δt erhält man also

$$\gamma P(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = \frac{dP}{dt}(t) =: P'(t).$$

Diese und weitere Gleichungen, welche eine Funktion und eine (oder mehrere) ihrer Ableitungen umfassen, sind das Thema dieser Vorlesung.

DEFINITION 1.1. *Eine* ***gewöhnliche Differenzialgleichung der n-ten Ordnung****, $n \geq 1$, ist eine Identität der Form*

$$\Phi(t, f(t), f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)) = 0 \,, \tag{1.1}$$

wobei Φ eine Funktion mehrerer Variablen ist, deren Argumente Werte einer Variablem t, einer Funktion f in der selben Variablen, sowie der Ableitungen von f.

BEISPIEL 1.2. F. Black und M. Scholes haben 1973 ein Modell für den Wert $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ einer Europäischen Option hergeleitet, welches 1997 mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften gekrönt wurde:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + rx\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) - ru(x,t) = 0$$

wobei $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}$ die (partiellen) Ableitungen der Funktion u bzgl. der Variable x bzw. t sind, also

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t_0) := \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h, t_0) - u(x_0, t_0)}{h}$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) := \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0, t_0 + h) - u(x_0, t_0)}{h}.$$

Dabei bezeichnet

- t die Zeit,
- x den Preis des Basiswertes,
- r, σ zwei phänomenologische Parameter: $r \equiv$ Zinssatz, $\sigma \equiv$ Volatilität.

Diese stellt ein Beispiel einer *partiellen Differenzialgleichung* statt. Partielle Differenzialgleichungen bilden ein breites und kompliziertes mathematisches Gebiet. In dieser Vorlesung werden wir ausschließlich gewöhnliche Differenzialgleichungen betrachten. □

Für ein gegebenes Φ besteht dann die Aufgabe in der Regel darin, eine oder mehrere Funktionen f zu finden, für welche die Gleichung (1.1) erfüllt ist.

ANMERKUNG 1.3. Differenzialgleichung oder Differen*t*ialgleichung? Laut Duden (`tinyurl.com/phbj3e3`): ≪Wörter auf -tial und -tiell können mit z geschrieben werden, wenn es verwandte Wörter auf z gibt.≫ Gleichwohl empfiehlt Duden ausdrücklich die Variante mit „z" (`duden.de/rechtschreibung/Differenzialgleichung`). Dieser Empfehlung werde ich konsequent durch diese Vorlesung folgen.

Oft betrachtet man Differenzialgleichungen, welche insbesondere die Gestalt

$$f^n(t) = \Psi(t, f(t), f'(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)) \tag{1.2}$$

haben – man spricht dabei von **separablen Differenzialgleichungen**. Hängt darüber hinaus Ψ nicht von t ab, wird also die Differenzialgleichung zu

$$f^n(t) = \Psi(f(t), f'(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)) \ , \tag{1.3}$$

so heißt die Gleichung **autonom**.

BEISPIEL 1.4. Das einfachste Modell einer Bevölkerung: die Bevölkerungstheorie von Thomas Malthus (1798). Ohne Migrationseffekte ist die Anzahl von Geburten und Toden proportional zur aktuellen Bevölkerung: Die *Steigerung* der Bewohneranzahl ist gleich der Geburtenrate minus der Sterberate, also

$$\frac{dN}{dt}(t) = \gamma N(t) - \tau N(t)$$

wobei $\gamma, \tau > 0$. Wenn die Bevölkerung groß ist, ist es vernünftig ihre Anzahl durch eine Funktion $N : [0, \infty) \to [0, \infty)$ der Zeit zu beschreiben (selbst wenn etwa ein Anteil $\frac{3}{7}$ oder $e^{0,1}$ eines Individuums kaum sinnvoll sind). □

BEISPIEL 1.5. Das zweiteinfachste Modell einer Bevölkerung: das logistische Modell von Pierre Verhulst (1838). Es gibt einen strukturellen Widerstand (Ressourcen, Raumbegrenzungen usw.) gegen unendliche Vermehrung der Bevölkerung. Man beschreibt Vermehrungs- und Sterbeprozesse durch Fortpflanzung und Verhungern, also

$$\frac{dN}{dt}(t) = \rho N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{\kappa}\right)$$

wobei $\rho, \kappa > 0$. Die Umwelt soll also die Vermehrung einer Bevölkerung beeinflussen. □

BEISPIEL 1.6. Marktanalyse von M.L. Vidale und H.B. Wolfe (1957): wird die Werbung eines Produktes eingestellt, so nehmen die Verkäufe des Produktes proportional zu den Verkäufen in der vorigen Zeiteinheit ab, also

$$\frac{dv}{dt}(t) = \rho u(t)(1 - v(t)) - kv(t),$$

wobei $\rho, k > 0$ und $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$: dabei stellt $v : \mathbb{R}_+ \to [0, 1]$ den Marktanteil dar, und deshalb ist $(1 - v(t))$ der Anteil des Marktes, der noch zu erobern ist. Die Parameter ρ, k beschreiben die Wirkung der Werbung bzw. wie schnell sie vergessen wird und u misst die Ausgaben für Werbung zum Zeitpunkt t. □

BEISPIEL 1.7. Radioaktiver Zerfall: Es seien $n(t)$ die Atome einer radioaktiven Substanz zur Zeit t. Die Anzahl $n(t)-n(t-\Delta t)$ der in einer Zeitspanne Δt zerfallenden Atome ist proportional zur ursprünglichen Anzahl von Atomen, etwa

$$\frac{dn}{dt}(t) = -\lambda n(t)$$

für ein $\lambda > 0$. □

DEFINITION 1.8. *Es seien $J_1, J_2, J_3 \subset \mathbb{R}$ drei Intervalle und $\Phi : J_1 \times J_2 \times J_3 \to \mathbb{R}$. Eine **Differenzialgleichung erster Ordnung***

$$\Phi(t, f(t), f'(t)) = 0$$

***zu lösen** bedeutet, eine differenzierbare Funktion f und ein Intervall $I \subset J_1$ zu finden, so dass $f(t) \in J_2$ und $f'(t) \in J_3$ für alle $t \in I$ und f die obige Gleichung für alle $t \in I$ erfüllt. Ein solches f heißt **lokale** (bzw. **globale**) **Lösung** falls $I \neq J$ (bzw. falls $I = J$).*

Eine entsprechende Definition kann man für Gleichungen höheren Ordnung formulieren.

ANMERKUNG 1.9. Wir weisen ausdrücklich darauf hin, dass in der Literatur über gewöhnliche Differenzialgleichungen oft eine andere Notation verwendet wird: Die gegebene Funktion, welche in der Gleichung vorkommt, wird dann mit f statt Φ bezeichnet, während ihr Argument (und somit die Unbekannte) y ist. Insgesamt wird für die allgemeine Differenzialgleichungen (1.1) oft die Notation

$$f(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0 \,, \tag{1.4}$$

oder einfacher

$$f(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \,, \tag{1.5}$$

verwendet. Gelegentlich werden wir dies auch tun.

BEISPIEL 1.10. Betrachte wieder das Beispiel 1.4. Dann wird eine globale Lösung durch

$$N(t) = \tilde{N} e^{(\gamma-\tau)t}$$

gegeben, wobei $\tilde{N}$ eine beliebige Konstante ist. Insbesondere gilt dann:

$$N(0) = \tilde{N}.$$

□

Je nachdem, wie die Differenzialgleichung entstanden ist (etwa durch eine passende Modellierung, wie im spezifischen Fall des Beispiels 1.10), kann der **Anfangswert** $N(0)$ eine besondere Bedeutung haben und gegebenfalls kann er als bekannt/gegeben angenommen werden. Anfangsbedingungen sind also i.A. nötig, um Differenzialgleichungen *eindeutig* zu lösen.

DEFINITION 1.11. *Ein **Cauchy-Problem zu lösen** bedeutet, eine Lösung einer gegebenen Differenzialgleichung zu finden, welche gleichzeitig auch einen gegebenen Anfangswert annimmt.*

BEISPIEL 1.12. Betrachte wieder das Beispiel 1.7. Die Lösung ist durch

$$n(t) = n(0)e^{-\lambda t}$$

gegeben. So sieht man z.B., dass die **Halbwertszeit**, also die Zeit, welche die Substanz braucht, um sich zu halbieren (also der Zeitpunkt $T > 0$, zu welchem $n(0) = 2n(T)$ gilt), durch

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

gegeben ist. Bei Uran-235, das üblicherweise in AKWs benutzt wird, beträgt die Halbwertszeit beispielsweise 703.800.000 Jahre. □

KAPITEL 2

Lineare Differenzialgleichungen

Lineare Differenzialgleichungen bilden eine einfache und dennoch (angesichts Theorie und Anwendungen) sehr wichtige Klasse. Dabei verwenden wir die folgende

DEFINITION 2.1. *Eine Differenzialgleichung heißt linear, falls jede lineare Kombination zweier Lösungen wieder eine Lösung ist.*

ANMERKUNG 2.2. Äquivalent kann man sagen, dass eine Differenzialgleichung linear ist, falls sie in der Form (1.2) geschrieben werden kann für eine in $f, \ldots, f^{(n-1}$ lineare Funktion Ψ: Dabei heißt $\Psi : X \to Y$ eine **lineare Funktion** oder ein **linearer Operator**, wenn X, Y Vektorräume sind und

$$\Psi(\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda \Psi(f_1) + \mu \Psi(f_2) \qquad \text{für alle } \lambda, \mu \in \mathbb{K} \text{ und alle } f_1, f_2 \in X \ .$$

Das heißt in unserem Fall soll insbesondere

$$\Psi(t, \lambda f_1 + \mu f_2, \ldots, \lambda f_1^{(n-1)} + \mu f_2^{(n-1)}) = \lambda \Psi(t, f_1, \ldots, f_1^{(n-1)}) + \mu \Psi(t, f_2, \ldots, f_2^{(n-1)})$$

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und alle zulässigen Funktionen f_1, f_2 gelten.

Eine Differenzialgleichung heißt **inhomogen**, oder manchmal **linear inhomogen**, wenn sie sich in der Form

$$\Phi(t, f, f', f'', \ldots, f^{(n)}) = \Phi_0(t, f, f', f'', \ldots, f^{(n)}) + \Phi_1(t)$$

mit Φ_0 linear und $\Phi_1 \not\equiv 0$ schreiben lässt (ist $\Phi_1 = 0$ heißt sie etwas pleonastisch **linear homogen**). Z.B. ist die Gleichung aus dem Beispiel 1.6 inhomogen, denn man kann sie als

$$\frac{dv}{dt}(t) = (\rho u(t) - k) v(t) + \underbrace{\rho u(t)}_{\Phi_1(t)}$$

umschreiben; während z.B. die Gleichung im Beispiel 2.3 homogen ist.

2.1. Homogene Gleichungen

Um uns aufzuwärmen wenden wir uns zuerst einer besonders einfachen Klasse von Differenzialgleichungen: denjenigen der Gestalt

$$f'(t) = Af(t), \qquad t \in I \ , \tag{2.1}$$

wobei I ein Intervall in $\mathbb{R}$ und A eine reelle Zahl ist. Somit fordern wir, dass die Ableitung einer Funktion f an jeder Stelle zum Wert von f selber proportional ist. Ist $A = 1$, so wissen wir aus der Analysis 1, dass die Exponentialfunktion eine mögliche Lösung dieser Gleichung bietet; auch für allgemeine reelle (und sogar komplexe!) Zahlen A liefert die Kettenregel, dass die Funktion

$$f : t \mapsto \exp(At)$$

die Gleichung (2.1) erfüllt. Dass ein solches f die *einzige* Lösung (bis auf Skalierung) von (2.1) ist, kann man beispielsweise aus den Sätzen von Picard–Lindelöf, die wir im Kapitel 3 sehen werden, folgern.

BEISPIEL 2.3. Die Differenzialgleichungen aus den Beispielen 1.4 und 1.7 haben diese Gestalt. Sie werden somit von den Funktionen

$$N(t) := \exp((\gamma - \tau)t), \qquad t \geq 0,$$

bzw.

$$n(t) := \exp(-\lambda t), \qquad t \geq 0,$$

gelöst. Tatsächlich sieht man, dass allgemeiner alle Funktionen der Gestalt

$$t \mapsto C_1 \exp((\gamma - \tau)t), \qquad t \geq 0,$$

bzw.

$$t \mapsto C_2 \exp(-\lambda t), \qquad t \geq 0,$$

für $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ diese Gleichungen erfüllen. Wir haben schon in Kapitel 1 gesehen, dass ein Anfangswert im Allgemeinen benötigt wird, um eine Differenzialgleichung *eindeutig* zu lösen. □

ANMERKUNG 2.4. Man kann diese Beobachtung verallgemeinern: Ist A keine Zahl, sondern eine quadratische $n \times n$-Matrix, so definiert man ihr Exponential durch

$$\exp(At) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \,. \tag{2.2}$$

Diese Reihe konvergiert in $\mathbb{C}^n$ in Norm aufgrund der Konvergenz der skalaren Exponentialreihe und der Abschätzung

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k, \qquad k \in \mathbb{N},$$

wobei die Norm (*eine beliebige* Matrixnorm!) $\|A\|$ von A definitionsgemäß ein Skalar ist. Die Motivationen dieser Verallgemeinerung werden im Kapitel 5 deutlicher geschildert.

Während ein solches Matrixexponential tatsächlich wohldefiniert ist, ist seine Berechnung für allgemeine Matrizen beinahe unmöglich. Es gibt aber einige spezielle Matrizenklassen, für die das Matrixexponential bekannt ist:

- Ist A diagonal, so besteht e^{tA} aus den Exponentialen der Diagonaleinträge von A, also
$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}, \qquad e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{t\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\alpha_n}. \end{pmatrix}$$
- Ist A **nilpotent**, etwa $A^{k+1} = 0$, so gilt
$$e^{tA} = \mathrm{Id} + tA + \frac{1}{2} t^2 A^2 + \ldots + \frac{1}{k!} t^k A^k.$$
Z.B. gilt
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ANMERKUNG 2.5. Es seien X, Y normierte Vektorräume. Ein linearer Operator $\Psi : X \to Y$ heißt **beschränkt**, wenn es ein $M > 0$ gibt, mit

$$\|\Psi(f)\|_Y \leq M\|f\|_X \qquad \text{für alle } f \in X.$$

Nun sieht man, dass die Exponentialreihe (2.2) ebenfalls wohldefiniert (und konvergent!) ist, falls Ψ keine endlichdimensionale Matrix ist, sondern ein beschränkter linearer Operator auf einem vollständigen normierten Raum. (Dabei identifizieren wir wie üblich einen linearen Operator mit seiner assoziierten Darstellungsmatrix.) Auch in solchen Fälle kann man also eine lineare homogene Differenzialgleichung lösen.

ANMERKUNG 2.6. Es gilt sogar Folgendes, was 1821 von A. Cauchy bewiesen wurde: Jede *stetige* Funktion $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, welche $\phi(t+s) = \phi(t)\phi(s)$ für alle $t, s \in \mathbb{C}$ erfüllt und nicht identisch verschwindet, ist eine Funktion der Form

$$\phi : t \mapsto \exp(\alpha t)$$

für $\alpha \in \mathbb{C}$.

Allgemeiner möchten wir jetzt lineare homogene Differenzialgleichungen 1. Ordnung der Form

$$y'(t) = p(t)y(t) \tag{2.3}$$

betrachten, wobei $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion ist.

SATZ 2.7. *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, a ein Häufungspunkt von I, $p : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche auch in den Häufungspunkten von I einen Grenzwert hat. Das Cauchy-Problem*

$$y'(t) = p(t)y(t), \quad t \in I, \qquad y(a) = y_0,$$

hat die globale Lösung

$$y(t) = y_0 e^{\int_a^t p(s)\ ds}, \qquad t \in I\ . \tag{2.4}$$

BEWEIS. Wir machen zunächst den Ansatz, dass die (noch zu bestimmende) Lösung nirgendwo verschwindet. Um die Differenzialgleichung zu lösen, teilen wir beide Seiten von (2.3) durch $y(t)$ und erhalten die äquivalente Formulierung

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = p(t).$$

Nun kann man beide Seiten integrieren und erhält, dass die Stammfunktionen der beiden Seiten übereinstimmen müssen. Diese sind $\log|y|$ bzw. $\int p(t)dt$, die Stammfunktion von p. Bekanntlich sind aber Stammfunktionen nur bis auf eine Konstante bestimmt, genauer gilt also die Gleichung

$$\log|y(t)| = \int_a^t p(s)ds + c$$

für ein $c \in \mathbb{R}$. Durch Exponentiation gilt

$$|y(t)| = e^{\log|y(t)|} = e^{\int_a^t p(s)ds + c} = e^{\int_a^t p(s)ds} e^c$$

für ein $c \in \mathbb{R}$, also

$$|y(t)| = K e^{\int_a^t p(s)ds}$$

für ein $K > 0$, oder auch
$$y(t) = \pm K e^{\int_a^t p(s)ds}$$
für ein $K > 0$. Weil die identisch verschwindende Funktion ebenfalls eine Lösung ist, erhalten wir schließlich die Formel
$$y(t) = K e^{\int_a^t p(s)ds} \tag{2.5}$$
für ein passendes $K \in \mathbb{R}$, das anhand der Anfangsbedingungen bestimmt werden soll. □

ANMERKUNG 2.8. Die Lösungsformel in (2.5) wurde gefunden unter der Annahme, dass y nirgendwo verschwindet. Könnte es auch weitere Lösungen geben, die doch irgendwo den Wert 0 annehmen? Wüssten wir schon, dass zu jedem Anfangswert genau eine Lösung existiert, so könnten wir die Möglichkeit einer solchen irgendwo verschwindenden Lösung ausschließen. Die Eindeutigkeit der Lösung werden wir tatsächlich aus dem Satz von Picard–Lindelöf, einem der Hauptsätze dieser Vorlesung, folgern können, so lange die Funktion p beschränkt ist.

ANMERKUNG 2.9. Im Beweis haben wir die Stetigkeit von p lediglich verwendet, um p integrieren zu dürfen. Allgemeiner haben alle *Regelfunktionen* p – etwa die Signumfunktion – eine Stammfunktion P, welche dann nur fast überall differenzierbar ist und mit p übereinstimmt. Der obige Satz könnte entsprechend verallgemeinert werden.

BEISPIEL 2.10. Betrachte das Cauchy-Problem
$$y'(t) = ty(t), \quad t \geq 1, \qquad y(1) = 7.$$
Diese Differenzialgleichung ist linear homogen, da man $p(t) = t$ setzen kann. Dann liefert der Satz 2.7 die globale Lösung
$$y(t) = 7\exp(\int_1^t s ds) = 7\exp(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}) = 7\exp(\frac{1}{2}(t^2 - 1)).$$
□

BEISPIEL 2.11. Betrachte das Cauchy-Problem
$$y'(t) = (t^3 + 4t^2 + 1)y(t), \quad t \geq 0, \qquad y(0) = 5.$$
Diese Differenzialgleichung ist linear homogen, da man $p(t) = t^3 + 4t^2 + 1$ setzen kann. Dann liefert der Satz 2.7 die globale Lösung
$$y(t) = 5\exp(\int_0^t (s^3 + 4s^2 + 1) ds) = 5\exp(\frac{1}{4}t^4 + \frac{4}{3}t^3 + t).$$
□

BEISPIEL 2.12. Betrachte das Cauchy-Problem
$$y'(t) = \frac{y(t)}{t}, \quad t \geq 1, \qquad y(1) = 3.$$
Diese Differenzialgleichung ist linear homogen, da man $p(t) = \frac{1}{t}$ setzen kann. Dann liefert der Satz 2.7 die globale Lösung
$$y(t) = 3\exp(\int_1^t \frac{1}{s} ds) = 3\exp(\log t - \log 1) = 3\exp(\log t) = 3t.$$
□

BEISPIEL 2.13. Betrachte das Cauchy-Problem

$$y'(t) = \cos(t)y(t), \quad t \geq 0, \qquad y(0) = 2.$$

Diese Differenzialgleichung ist linear homogen, da man $p(t) = \cos(t)$ setzen kann. Dann liefert der Satz 2.7 die globale Lösung

$$y(t) = 2\exp(\int_0^t \cos(s)ds) = 2\exp(\sin t - \sin 0) = 2\exp(\sin t).$$

□

BEISPIEL 2.14. Betrachte das Cauchy-Problem

$$y'(t) = \sqrt{t}y(t), \quad t \geq 0, \qquad y(0) = 10.$$

Diese Differenzialgleichung ist linear homogen, da man $p(t) = \sqrt{t}$ setzen kann. Dann liefert der Satz 2.7 die Lösung

$$y(t) = 10\exp(\int_0^t \sqrt{s}ds) = 10\exp(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}).$$

□

Man kann auch Differenzialgleichungen betrachten, die keine *Anfangs-*, sondern eine *Endbedingung* haben. Natürliche Änderungen des Integrationsbereiches von p sollten dabei berücksichtigt werden.

BEISPIEL 2.15. Betrachte das Cauchy-Problem

$$y'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}y(x), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \qquad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Diese Differenzialgleichung ist linear homogen, da man $p(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ setzen kann. Dann liefert der Satz 2.7 die Lösung

$$y(x) = 1\exp(\int_{\frac{\pi}{4}}^x \frac{1}{\cos^2(s)}ds) = \exp(\tan(x) - \tan(\frac{\pi}{4})) = \exp(\tan(x) - 1).$$

□

2.2. Inhomogene Gleichungen

Durch die Methode der sogenannten **Variation der Konstanten** kann man auch die Lösungen von inhomogenen Differenzialgleichungen, d.h. Differenzialgleichungen der Form

$$y'(t) = p(t)y(t) + q(t) \;, \tag{2.6}$$

finden. Die Idee dabei ist, dass sich die allgemeine Lösung von (2.6) als die Summe einer allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung (d.h. von (2.3)) und einer einzigen Lösung der inhomogenen Gleichung auffassen lässt.

ANMERKUNG 2.16. Es seien y_1 eine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung (2.6) und y_2 eine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung (2.3). Dann ist auch ihre Summe $y_1 + y_2$ eine Lösung von (2.6).

SATZ 2.17. *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, a ein Häufungspunkt von I und $p, q : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, welche in den Häufungspunkten von I Grenzwerte besitzen. Die Lösungen der Differenzialgleichung*

$$y'(t) = p(t)y(t) + q(t), \quad t \in I, \tag{2.7}$$

sind alle von der Form

$$y(t) = e^{\int_a^t p(s)ds} \left(\int_a^t e^{-\int_a^s p(r)dr} q(s)ds + C \right)$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist die einzige Lösung des Cauchy-Problems

$$y'(t) = p(t)y(t) + q(t), \quad t \in I, \qquad y(a) = y_0,$$

durch

$$y(t) = e^{\int_a^t p(s)ds} \left(\int_a^t e^{-\int_a^s p(r)dr} q(s)ds + y_0 \right)$$

gegeben.

BEWEIS. Um eine spezielle Lösung zu finden verwendet man den Ansatz, dass die Lösung von der Form

$$y(t) = K(t)e^{\int_a^t p(s)ds} \tag{2.8}$$

für eine Funktion $K(t)$ (statt für eine Konstante wie im homogenen Fall) ist. Durch Ableiten erhält man

$$y'(t) = K(t)p(t)e^{\int_a^t p(s)ds} + K'(t)e^{\int_a^t p(s)ds} = p(t)y(t) + K'(t)e^{\int_a^t p(s)ds}$$

(die 2. Identität folgt daraus, dass $K(t)p(t)e^{\int_a^t p(s)ds}$ die allgemeine Lösung von (2.3) darstellt). Damit diese Funktion auch (2.6) löst muss dementsprechend gelten, dass

$$K'(t)e^{\int_a^t p(s)ds} = q(t),$$

oder anders ausgedrückt, dass

$$K'(t) = q(t)e^{-\int_a^t p(s)ds}.$$

Das wird von der speziellen Lösung

$$K(t) = \int_a^t q(s)e^{-\int_a^s p(r)dr} ds$$

erfüllt. □

BEISPIEL 2.18. Betrachte die Differenzialgleichung

$$y'(t) = y(t) + 1, \qquad t \geq 0.$$

Diese ist eine lineare inhomogene Gleichung mit $p(t) = q(t) = 1$, $t \geq 0$. Es gilt

$$\int_0^t p(s)ds = t$$

und somit liefert der Satz 2.6 die allgemeine Lösung

$$y(t) = e^t \left(\int_0^t e^{-s}ds + C \right) = e^t(-e^{-t} + 1 + C) = (C+1)e^t - 1.$$

Tatsächlich gilt dann

$$y'(t) = (C+1)e^t = ((C+1)e^t - 1) + 1 = y(t) + 1,$$

also löst diese Funktion für alle $C \in \mathbb{R}$ die obige Differenzialgleichung. □

ANMERKUNG 2.19. Dass die Lösung die Form (2.8) annimmt, ist erstmal eine willkürliche Annahme: doch werden wir durch diese Annahme genau eine Lösung finden, und nach dem Beispiel 3.39 ist diese genau die einzige Lösung: somit erweist sich der Ansatz als keine Beschränkung der Allgemeinheit.

BEISPIEL 2.20. Betrachte die Differenzialgleichung

$$z'(t) = (1-m)z(t) + (1-m), \qquad t \geq 0.$$

Diese ist eine lineare inhomogene Gleichung mit $p(t) = q(t) = 1 - m$, $t \geq 0$, wobei $m \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\int_0^t p(s)ds = (1-m)t$$

und somit liefert der Satz 2.6 die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{(1-m)t}\left(\int_0^t (1-m)e^{-(1-m)s}ds + C\right) \\ &= e^{(1-m)t}\left(-\, e^{-(1-m)s}\Big|_{s=0}^{s=t} + C\right) \\ &= e^{(1-m)t}\left(-e^{-(1-m)t} + 1 + C\right) \\ &= e^{(1-m)t}(C+1) - 1. \end{aligned}$$

Lass uns dies überprüfen: Man sieht, dass

$$\begin{aligned} z'(t) &= (1-m)(C+1)e^{(1-m)t} \\ &= (1-m)\left((C+1)e^{(1-m)t} - 1 + 1\right) \\ &= (1-m)\left((C+1)e^{(1-m)t} - 1\right) + (1-m) \\ &= (1-m)z(t) + (1-m). \end{aligned}$$

□

BEISPIEL 2.21. Betrachte die lineare inhomogene Differenzialgleichung

$$y'(t) = ty(t) + e^{\frac{1}{2}t^2}, \qquad t \geq 1.$$

Dank Beispiel 2.10 weiß man, dass $y(t) = e^{\frac{1}{2}(t^2-1)}$ eine spezielle Lösung der assoziierten homogenen Gleichung ist. Dann liefert der Satz 2.17 die globale Lösung

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\frac{1}{2}(t^2-1)}\left(\int_1^t e^{-\frac{1}{2}(s^2-1)}e^{\frac{1}{2}(s^2)} + C\right) \\ &= e^{\frac{1}{2}(t^2-1)}\left(\int_1^t e^{-\frac{1}{2}} + C\right) \\ &= e^{\frac{1}{2}(t^2-1)}\left(e^{-\frac{1}{2}}(t-1) + C\right), \end{aligned}$$

wobei die Konstante C anhand der Anfangsbedingung bestimmt werden soll. Das ist möglich, denn z.B. ist $y(1) = C$. □

BEISPIEL 2.22. Betrachte die lineare inhomogene Differenzialgleichung

$$v'(t) = -(\rho u(t) + k)v(t) + \rho u(t), \qquad t \in [0, \infty)$$

aus dem Beispiel 1.6. Es handelt sich um eine lineare, inhomogene Differenzialgleichung 1. Ordnung. Dann liefert der Satz 2.7 die Lösung

$$v(t) = e^{-\int_0^t (\rho u(s)+k)ds} \left(\int_0^t e^{\int_0^s (\rho u(r)+k)dr} \rho u(s) ds + C \right)$$

für $C \in \mathbb{R}$. Ist z.B. $u(t) = t$ und $k = 0$, so erhält man

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-\int_0^t (\rho s)ds} \left(\rho \int_0^t e^{\int_0^s (\rho r)dr} s ds + C \right) \\ &= e^{-\frac{\rho}{2}t^2} \left(\rho \int_0^t e^{\frac{\rho}{2}s^2} s ds + C \right). \end{aligned}$$

Weil für alle $m \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx} e^{mx^2} = 2mxe^{mx^2},$$

erhält man

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-\frac{\rho}{2}t^2} \left(\rho \int_0^t e^{\frac{\rho}{2}s^2} s ds + C \right) \\ &= e^{-\frac{\rho}{2}t^2} \left(e^{\frac{\rho}{2}s^2} \Big|_{s=0}^{s=t} + C \right) \\ &= e^{-\frac{\rho}{2}t^2} \left(e^{\frac{\rho}{2}t^2} - 1 + C \right) \\ &= 1 + e^{-\frac{\rho}{2}t^2} (C - 1) \end{aligned}$$

Ist stattdessen $u(t) = w \in \mathbb{R}$ eine Konstante, so erhält man

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-\int_0^t (\rho w+k)ds} \left(\int_0^t e^{\int_0^s (\rho w+k)dr} \rho w ds + C \right) \\ &= e^{-(\rho w+k)t} \left(\rho w \int_0^t e^{(\rho w+k)s} ds + C \right) \\ &= e^{-(\rho w+k)t} \left(\frac{\rho w}{\rho w + k} e^{(\rho w+k)t} - \frac{\rho w}{\rho w + k} + C \right) \\ &= \frac{\rho w}{\rho w + k} + \left(C - \frac{\rho w}{\rho w + k} \right) e^{-(\rho w+k)t}. \end{aligned}$$

□

BEISPIEL 2.23. Betrachte die Gleichung

$$y'(t) = \frac{1}{t} y(t) + t^5, \qquad t \in [2, \infty).$$

Dank Beispiel 2.12 weiß man, dass $y(t) = e^{\log t - \log 2} = \frac{t}{2}$ eine spezielle Lösung der assoziierten homogenen Gleichung ist. Dann liefert der Satz 2.17 die Lösung

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{t}{2}\left(\int_2^t e^{-\log s + \log 2} s^5 ds + C\right) \\ &= \frac{t}{2}\left(\int_2^t \frac{2}{s} s^5 ds + C\right) \\ &= \frac{t}{2}\left(2\int_2^t s^4 ds + C\right) \\ &= \frac{t}{2}\left(\frac{2}{5}s^5\Big|_{s=2}^{s=t} + C\right). \end{aligned}$$

Wie gehabt soll die Konstante C durch die Anfangsbedingung bestimmt werden. □

BEISPIEL 2.24. Betrachte die Gleichung

$$y'(t) = \frac{1}{(\cos(t))^2} y(t) + e^{\tan(x)}, \qquad t \in [0, \frac{\pi}{4}].$$

Dank Beispiel 2.15 weißt man, dass $y(t) = e^{\tan(t)-1}$ eine spezielle Lösung der assoziierten homogenen Gleichung ist. Dann liefert der Satz 2.17 die Lösung

$$y(t) = e^{\tan(t)-1}\left(\int_0^t e^{1-\tan(s)} e^{\tan(s)} ds + C\right) = e^{\tan(t)-1}(et + C) = te^{\tan(t)} + Ce^{\tan(t)-1}.$$

□

ANMERKUNG 2.25. In der Anmerkung 2.4 haben wir die Formel für die Lösung einer linearen Differenzialgleichung 1. Ordnung zum vektorwertigen Fall verallgemeinert.

Es ist verlockend, analog dazu eine vektorwertige Version der Variation-der-Konstanten-Formel (2.4) herzuleiten. Angesichts der Leibnitzschen Produktregel für Matrizen

$$\frac{d}{dt}(AB)(t) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$$

ist tatsächlich die Funktion

$$\mathbf{u}(t) := e^{\int_0^t A(s)ds}\left(\int_0^t F(s)e^{-\int_0^s A(r)dr} ds + C\right)$$

eine Lösung der Gleichung (5.5) (das überprüft man leicht), *falls*

$$A(t)A(s) = A(s)A(t) \qquad \text{für alle } t, s \geq t_0 \,.$$

Diese Kommutativitätsbedingung ist nötig, da die Algebra der Matrizen nichtkommutativ ist. Im Kapitel 5 werden wir sehen, wie man auch mit dem nichtkommutativen Fall umgehen kann.

KAPITEL 3

Nichtlineare Differenzialgleichungen und der Satz von Picard–Lindelöf

Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel mit nichtlinearen Differenzialgleichungen.

3.1. Einige Klassen explizit lösbarer Differenzialgleichungen

BEISPIEL 3.1. Viele Modelle in den Naturwissenschaften lassen sich durch Differenzialgleichungen der Form

$$y'(t) = p(t)y(t) + q(t)(y(t))^m \tag{3.1}$$

beschreiben, wobei $m \neq 1$, sonst wird (3.1) einfach zu

$$y'(t) = \big(p(t) + q(t)\big)y(t),$$

und $m \neq 0$, sonst wird (3.1) einfach zu

$$y'(t) = p(t)y(t) + q(t).$$

Diese heißen **Bernoullische Differenzialgleichungen**. Solche Differenzialgleichungen 1. Ordnung sind *nichtlinear*, denn sie enthalten den Term $q(x)(y(t))^m$.

Beispielsweise ist die Differenzialgleichung aus dem Beispiel 1.5 ist eine nichtlineare Bernoullische Differenzialgleichung, mit $m = 2$.

Eine Bernoullische Differenzialgleichung kann man als

$$\frac{y'(t)}{(y(t))^m} = \frac{p(t)}{(y(t))^{m-1}} + q(t),$$

umschreiben. Durch die bijektive Transformation

$$z(t) := (y(t))^{1-m} = \frac{1}{(y(t))^{m-1}}$$

erhält man

$$z'(t) = (1-m)\frac{y'(t)}{(y(t))^m} \ .$$

Genau dann löst y die obige (nichtlineare) Bernoullische Differenzialgleichung, wenn z die lineare inhomogene Differenzialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{z'(t)}{1-m} = p(t)z(t) + q(t)$$

löst. Die Lösung dieser Differenzialgleichung kann wiederum durch Anwendung des Satzes 2.17 gefunden werden. □

BEISPIEL 3.2. Betrachte den Spezialfall $p(t) = q(t) = 1$, $t \geq 0$, also die Differenzialgleichung

$$y'(t) = y(t) + (y(t))^m, \qquad t \geq 0. \tag{3.2}$$

Die Transformation

$$z(t) := (y(t))^{1-m} = \frac{1}{(y(t))^{m-1}}$$

liefert

$$z'(t) = (1-m)z(t) + (1-m), \qquad t \geq 0.$$

Nach dem Beispiel (2.20) wissen wir, dass die allgemeine Lösung der Gleichung von der Form

$$z(t) = (C+1)e^{(1-m)t} - 1$$

ist. Somit ist

$$y(t) = \left((C+1)e^{(1-m)t} - 1\right)^{\frac{1}{1-m}}$$

die allgemeine Lösung von 3.2. Für $m = 2$ man erhält z.B.

$$y(t) = \frac{e^t}{C+1-e^t}.$$

Tatsächlich ist

$$y'(t) = \frac{e^t(C+1)}{(C+1-e^t)^2} = \frac{e^t}{C+1-e^t} + \frac{e^{2t}}{(C+1-e^t)^2} = y(t) + (y(t))^2.$$

□

Allgemeiner kann man die Theorie der linearen Differenzialgleichungen 1. Ordnung anwenden.

SATZ 3.3. *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $p, q : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, welche auch in den Häufungspunkten von I einen Grenzwert haben. Sei $m \neq 1$. Die Lösungen der Differenzialgleichung*

$$y'(t) = p(t)y(t) + q(t)(y(t))^m$$

sind alle von der Form

$$y(t) = \frac{e^{\int_a^t p(s)ds}}{\sqrt[m-1]{-\int_a^t e^{(m-1)\int_a^s p(r)dr}(m-1)q(s)ds + C}},$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

BEWEIS. Nach dem Satz 2.17 erhält man

$$z(t) = e^{(1-m)\int_a^t p(s)ds}\left(\int_a^t e^{(m-1)\int_a^s p(r)dr}(1-m)q(s)ds + C\right) = \frac{-\int_a^t e^{(m-1)\int_a^s p(r)dr}(m-1)q(s)ds + C}{e^{(m-1)\int_a^t p(s)ds}}.$$

Nun genügt es zu merken, dass nach Konstruktion[1]

$$y(t) = (z(t))^{\frac{1}{1-m}} = \frac{1}{\sqrt[m-1]{z(t)}},$$

[1]Hier nutzt man die Konvention, dass $\sqrt[1]{x} = x$ und $\sqrt[-1]{x} = \frac{1}{x}$.

d.h.

$$y(t) = \left(\frac{e^{(m-1)\int_a^t p(s)ds}}{-\int_a^t e^{(m-1)\int_a^s p(r)dr}(m-1)q(s)ds + C} \right)^{\frac{1}{m-1}} = \sqrt[m-1]{\frac{e^{(m-1)\int_a^t p(s)ds}}{-\int_a^t e^{(m-1)\int_a^s p(r)dr}(m-1)q(s)ds + C}}.$$

□

ANMERKUNG 3.4. Im Spezialfall $m = 2$ liefert der Satz 3.3 für die Differenzialgleichung

$$y'(t) = p(t)y(t) + q(t)(y(t))^2$$

die allgemeine Lösung

$$y(t) = \frac{e^{\int_a^t p(s)ds}}{C - \int_a^t e^{\int_a^s p(r)dr} q(s)ds}.$$

BEISPIEL 3.5. Betrachte wieder die Differenzialgleichung

$$\frac{dN}{dt}(t) = \rho N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{\kappa}\right) = \rho N(t) - \frac{\rho}{\kappa}(N(t))^2$$

aus dem Beispiel 1.5. Das ist eine Bernoullische Gleichung mit $m = 2$, $p(x) = \rho$ und $q(x) = -\frac{\rho}{\kappa}$ für alle $t \geq 0$. Somit liefern der Satz 3.3 und die Anmerkung 3.4 die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{e^{\int_0^t \rho ds}}{C + \int_0^t e^{\int_0^s \rho dr} \frac{\rho}{\kappa} ds} \\ &= \frac{e^{\rho t}}{C + \frac{1}{\kappa} \int_0^t e^{\rho s} \rho ds} \\ &= \frac{e^{\rho t}}{C + \frac{1}{\kappa}\, e^{\rho s}\big|_{s=0}^{s=t}} \\ &= \frac{e^{\rho t}}{C + \frac{1}{\kappa}\left(e^{\rho t} - 1\right)}. \end{aligned}$$

□

BEISPIEL 3.6. Die Wirtschaftswissenschaftler Robert Merton Solow und Trevor Swan haben 1956 ein Modell für das Wachstum entwickelt. Dafür hat Solow 1987 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften erhalten. Bezeichnet k den Kapitalstock pro Kopf in einem Land (idealerweise ohne Wirtschaftsbeziehungen mit dem Ausland), so lautet ihr Modell

$$k'(t) = f(k(t)) - \delta k(t),$$

wobei meistens gilt

$$f(x) = x^\alpha$$

für ein $\alpha \in (0, 1)$, die sogenannte Produktionselastizität des Kapitals. Diese ist eine Bernoullische Differenzialgleichung mit $p(t) = -\delta$ und $q(t) = 1$ für alle $t \in [0, \infty)$ und mit $m = \alpha$. So liefert der

Satz 3.3 die Lösungen

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{e^{-\int_0^t \delta ds}}{\left(-\int_0^t e^{-(\alpha-1)\int_0^s \delta dr}(\alpha-1)ds + C\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}} \\
&= \frac{e^{-\delta t}}{\left(-\int_0^t e^{-(\alpha-1)\delta s}(\alpha-1)ds + C\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}} \\
&= \frac{e^{-\delta t}}{\left(\frac{1}{\delta}e^{(1-\alpha)\delta s} - \frac{1}{\delta} + C\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}}
\end{aligned}
$$

für ein $C \in \mathbb{R}$. □

Auch in anderen Fällen kann man, ähnlich wie im Fall einer linearen Differenzialgleichung, versuchen, die Gleichung

$$y'(t) = f(y(t))$$

zu lösen.

SATZ 3.7. *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die nirgendwo verschwindet. Hat $\frac{1}{f}$ eine Stammfunktion g und gibt es eine Funktion γ so dass $\gamma(g(x)) = x$ für alle $x \in I$, so hat die Differenzialgleichung*

$$y'(t) = f(y(t)).$$

die einzige lokale Lösung

$$y(t) = \gamma(t - C)$$

für ein $C \in \mathbb{R}$.

BEWEIS. Ist

$$\frac{1}{f(t)} = g'(t)$$

für eine passende Funktion g, so gilt

$$1 = \frac{y'(t)}{f(y(t))} = g'(y(t))y'(t) = \frac{d}{dt}(g \circ y(t)).$$

Durch Integration der beiden Seiten erhält man

$$t - C = (g \circ y)(t).$$

Ist die Funktion g invertierbar mit (links-)Inverser γ, so gilt

$$y(t) = \gamma(t - C)$$

für ein $C \in \mathbb{R}$. □

BEISPIEL 3.8. Betrachte die Gleichung

$$y'(t) = y^3(t), \qquad t \geq 0.$$

Ist $f(x) := x^3$, so kann man die Gleichung als

$$y'(t) = f(y(t)), \qquad t \in [0, \infty) \ ,$$

umschreiben.

Lass uns anfangs die Gleichung nur für $t \in (0,\infty)$ betrachten: Dort verschwindet f nirgends und der Satz 3.7 ist somit anwendbar. Setze $g(x) := -\frac{1}{2x^2} = -\frac{x^{-2}}{2}$. Nun gilt $g'(x) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ und daher

$$1 = \frac{y'(t)}{y^3(t)} = \frac{d}{dt}(g \circ y(t)) = -\frac{d}{dt}\frac{1}{2y^2(t)} \ :$$

Daher

$$t = \int_0^t \frac{y'(s)}{y^3(s)} ds = -\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{ds}\frac{1}{y^2(s)} ds = -\frac{1}{2}\frac{1}{y^2(t)} + C \ .$$

Somit gilt

$$y^2(t) = -\frac{1}{2(t-C)} = \frac{1}{2(C-t)} \ ,$$

d.h.

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2(C-t)}} = (2(C-t))^{-\frac{1}{2}}.$$

(Die Funktion g ist nämlich invertierbar mit Inverser $\gamma(z) = \frac{1}{\sqrt{-2z}}$; beachte $\gamma(g(t)) = t \in (0,\infty)$ weshalb die positive Wurzel gewählt werden muss.) Diese Lösung ist unter der Bedingung $t > 0$ gefunden worden, man kann aber beim direkten Hinschauen feststellen, dass sie auch für $t = 0$ – und somit im ganzen Intervall $t \in [0,\infty)$ – eine Lösung liefert. Das ursprüngliche Problem ist somit gelöst. Tatsächlich gilt

$$y'(t) = -\frac{1}{2}(2(C-t))^{-\frac{3}{2}}(-2) = (2(C-t))^{-\frac{3}{2}} = y^3(t), \qquad t \geq 0 \ .$$

Die Konstante C wird von der Anfangsbedingung, etwa $y(0) = y_0$, bestimmt: somit ist

$$y : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{y_0^{-2} - 2t}}$$

die einzige Lösung des Cauchy-Problems

$$y'(t) = y^3(t), \quad t \geq 0, \qquad y(0) = y_0 \ .$$

Diese Lösung ist nur dann definiert, wenn $y_0^{-2} - 2t > 0$, also wenn $t < \frac{1}{2}y_0^{-2}$: Sie ist somit eine lokale Lösung. □

BEISPIEL 3.9. Betrachte die Gleichung

$$y'(t) = \frac{1}{y(t)}, \qquad t > 0.$$

Ist $f(x) = x^{-1}$, so kann man die Gleichung umformulieren als

$$y'(t) = f(y(t)), \qquad t > 0.$$

Die Funktion $\frac{1}{f}$ ist die Identität, also $\frac{1}{f(x)} = x$, ihre Stammfunktion ist durch $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ gegeben, welche invertierbar ist mit Inverser $\gamma(x) = \sqrt{2x}$ (Beachte: Es muss wieder $\gamma(g(t)) = t > 0$ gelten). Nach dem Satz 3.7 ist die Lösung der Differenzialgleichung durch $y(t) = \sqrt{2t - C}$ gegeben. Tatsächlich gilt

$$y'(t)y(t) = 1,$$

wobei

$$y'(t)y(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(y(t))^2,$$

also

$$\frac{d}{dt}(y(t))^2 = 2$$

und durch Integration erhält man

$$(y(t))^2 = 2t - C,$$

also

$$y(t) = \sqrt{2t - C}.$$

□

Schließlich betrachten wir die sogenannten **Riccati-Gleichungen**, d.h. nichtlineare Differenzialgleichungen der Form

$$y'(t) = f_0(t) + f_1(t)y(t) + f_2(t)(y(t))^2, \qquad t \in I, \tag{3.3}$$

wobei $f_0, f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ und sowohl $f_0(t) \neq 0$ als auch $f_2(t) \neq 0$ (sonst wäre (3.3) eine herkömmliche Bernoullische bzw. lineare inhomogene Differenzialgleichung) für alle t. Die Grundannahme ist, dass man eine spezielle Lösung dieser Gleichung schon kennt, etwa $\tilde{y}$. Durch die Transformation

$$z(t) = \frac{1}{y(t) - \tilde{y}(t)}$$

erhält man

$$y(t) = \tilde{y}(t) + \frac{1}{z(t)} \qquad \text{und somit} \qquad y'(t) = \tilde{y}'(t) - \frac{z'(t)}{(z(t))^2}.$$

Somit ist y genau dann eine Lösung von (3.3), wenn z eine Lösung der linearen inhomogenen Differenzialgleichung

$$z'(t) = -\left(f_1(t) + 2f_2(t)\tilde{y}(t)\right) z(t) - f_2(t), \qquad t \in I\ ,$$

ist (insbesondere hängt z und somit y nicht von f_0 ab!). Wie gehabt kann man diese Differenzialgleichung tatsächlich lösen: es gilt nämlich

$$z(t) = e^{-\int_a^t (f_1(s)+2f_2(s)\tilde{y}(s))ds}\left(-\int_a^t e^{\int_a^s (f_1(r)+2f_2(r)\tilde{y}(r))ds} f_2(s)ds + C\right).$$

SATZ 3.10. *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f_0, f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, von denen keine identisch verschwindet. Sei eine spezielle Lösung $\tilde{y}$ von* (3.3) *bekannt. Dann ist*

$$y(t) = \tilde{y}(t) + \frac{e^{\int_a^t (f_1(s)+2f_2(s)\tilde{y}(s))ds}}{C - \int_a^t e^{\int_a^s (f_1(r)+2f_2(r)\tilde{y}(r))dr} f_2(s)ds}, \qquad t \in I\ ,$$

die allgemeine Lösung von (3.3)*, für ein $C \in \mathbb{R}$.*

BEISPIEL 3.11. Betrachte die Riccati-Gleichung

$$y'(t) = t^3 + \frac{2}{t}y(t) - \frac{1}{t}y^2(t), \qquad t \geq 1.$$

Bekommt man den Hinweis, dass die Funktion

$$\tilde{y}(t) = -t^2$$

eine spezielle Lösung der obigen Differenzialgleichung ist, so kann man den Satz 3.10 anwenden mit $f_0(t) = t^3$, $f_1(t) = \frac{2}{t}$ und $f_2(t) = -\frac{1}{t}$. Insbesondere gilt $(f_1 + 2f_2\tilde{y})(t) = 2(\frac{1}{t} + t)$ für alle $t \geq 1$. Die Stammfunktion ist

$$\int_1^t (f_1 + 2f_2\tilde{y})(s)ds = \int_1^t 2(\frac{1}{s} + s)ds = 2\log t + t^2 - 2.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} y(t) &= -t^2 + \frac{e^{2\log t + t^2 - 2}}{C + \int_1^t e^{2\log s + s^2 - 2}\frac{1}{s}ds} \\ &= -t^2 + \frac{t^2 e^{t^2-2}}{C + \int_1^t s e^{s^2-2}ds} \\ &= -t^2 + \frac{t^2 e^{t^2-2}}{C + \int_1^t \frac{1}{2}\frac{d}{ds}e^{s^2-2}ds} \\ &= -t^2 + \frac{t^2 e^{t^2-2}}{C + \frac{1}{2}\left(e^{t^2-2} - e^{-1}\right)}. \end{aligned}$$

□

3.2. Der Satz von Picard–Lindelöf

Die obigen Beispiele zeigen, dass einige Klassen nichtlinearer Differenzialgleichungen explizit gelöst werden können. Dennoch: Für eine ganz allgemeine nichtlineare Differenzialgleichung ist in der Regel keine explizite Lösung bekannt. Man gibt sich deshalb im Allgemeinen schon zufrieden,, wenn man feststellen kann, dass eine Lösung überhaupt existiert und – in Abhängigkeit vom Anfangswert – eindeutig bestimmt ist. Existenz und Eindeutigkeit sind eine minimale Forderung, die man an Systeme stellt, die man von physikalischen Prinzipien hergeleitet hat. Denn man geht in der Regel davon aus, dass die Natur nicht zwischen zwei – sozusagen gleich wahrscheinlichen – Lösungen wählen könnte.

Bevor wir die Lösbarkeit einer wichtigen Klasse von Differenzialgleichungen untersuchen, möchten wir an zwei wichtige Begriffe erinnern.

DEFINITION 3.12. *Es sei M eine Menge. Eine **Metrik** d auf M ist eine Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$ so dass für alle $x, y, z \in M$*

(M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung).

*Ein Paar (M, d) heißt **metrischer Raum**.*

Der Begriff von Metrik reicht aus, um **konvergente Folgen** bzw. **Cauchy-Folgen** zu definieren, und somit auch den Begriff der Stetigkeit. Ein metrischer Raum heißt wie üblich **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge (bezüglich seiner Norm) bereits konvergent ist.

DEFINITION 3.13. *Es sei X ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Eine **Halbnorm** $\|\cdot\|$ auf X ist eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ so dass für alle $x, y \in X$ und alle $\alpha \in \mathbb{K}$*

(N1) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung),

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ *(Multiplikativität des Betrags),*

Gilt zudem

(N3) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

so heißt $\|\cdot\|$ *eine* ***Norm*** *und das Paar* $(X, \|\cdot\|)$ *ein* ***normierter Raum****. Ein vollständiger normierter Raum heißt* ***Banachraum****.*

ANMERKUNG 3.14. Jede Norm induziert in einer kanonischen Weise durch

$$d(x,y) := \|x-y\|$$

eine Metrik, und somit ist jeder normierte Raum ein metrischer Raum. Insbesondere ist jede abgeschlossene **Teilmenge** eines normierten Raumes ein metrischer Raum – bezüglich der wie oben induzierten Metrik.

Umgekehrt ist nicht jeder metrischer Raum ein normierter Raum.

DEFINITION 3.15. *Es seien* $(X, d_X), (Y, d_Y)$ *metrische Räume,* $A \subset X$. *Eine Funktion* $f : A \to Y$ *heißt*

- ***lokal Lipschitz-stetig****, falls für alle* $x \in A$ *eine Konstante* $L_x > 0$ *und eine offene Umgebung* $O_x \subset A$ *von* x *existieren, so dass*

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \le L_x d_X(x_1, x_2) \qquad \text{für alle} x_1, x_2 \in O_x\ ;$$

- ***global Lipschitz-stetig****, oder manchmal einfach* ***Lipschitz-stetig****, falls eine Konstante* $L > 0$ *existiert, so dass*

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \le L d_X(x_1, x_2) \qquad \text{für alle} x_1, x_2 \in A\ ; \tag{3.4}$$

- *eine* ***strikte Kontraktion****, falls* f *global Lipschitz-stetig mit* $L < 1$ *ist.*

ANMERKUNG 3.16. (1) Ist $f : A \to Y$ global Lipschitz-stetig, so heißt jedes L, welches (3.4) erfüllt, **Lipschitz-Konstante** von f. Ist L eine Lipschitz-Konstante, so ist offensichtlich jede andere Zahl $M > L$ ebenfalls eine Lipschitz-Konstante. Daher ist es verlockend, die (endliche) Zahl

$$L_f := \sup_{\substack{x_1, x_2 \in A \\ x_1 \neq x_2}} \frac{d_Y(f(x_1), f(x_2))}{d_X(x_1, x_2)}$$

zu betrachten. Ist $L_f = 0$, so ist die Funktion konstant. Somit ist L_f keine Norm – wohl aber eine Halbnorm auf dem Raum der Lipschitz-stetigen Funktionen von A nach Y. Ist X ein normierter Raum, so bildet die Menge $\mathrm{Lip}(A;Y)$ der Lipschitz-stetigen Funktionen von A nach Y einen Vektorraum, der tatsächlich zu einem normierten Raum wird, wenn man ihn durch die Abbildung

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} := \sup_{x \in A} \|f(x)\|_X + L_f$$

normiert. Ist X sogar ein Banachraum, so ist auch $\mathrm{Lip}(A;Y)$ ein Banachraum.

(2) Ist A darüber hinaus eine zusammenhängende Menge, so wird für jedes willkürlich gewählte $x_0 \in A$ die Menge $\mathrm{Lip}(A;Y)$ auch durch

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} := f(x_0) + L_f$$

normiert – beispielsweise, falls $A = X$, $x_0 := 0$.

(3) Es seien $A = X$, Y normierte Räume und f linear im Sinne vom Kapitel 2. So ist f genau dann Lipschitz-stetig, wenn f ein **beschränkter** Operator ist.

Somit wird die Menge der Lipschitz-stetigen linearen Funktionen (äquivalent: beschränkten linearen Operatoren) von X nach Y zu einem normierten Raum, den man üblicherweise mit $\mathcal{L}(X, Y)$ bezeichnet, bezüglich der Norm

$$\|f\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X} .$$

Das ist mit der in (2) eingeführten Norm verträglich, da aufgrund der Linearität $f(0) = 0$ gilt.

Vorsicht! In der Funktionalanalysis nennt man einen beschränkten linearen Operator dann **kontraktiv**, wenn dessen oben definierte Norm ≤ 1 ist. Die Bedingung in der Definition 3.15 ist somit *stärker*: Die Identität ist nicht strikt kontraktiv, wohl aber kontraktiv.

ANMERKUNG 3.17. (1) Jede lokal Lipschitz-stetige Funktion ist auch stetig: Denn sind $\epsilon > 0$ und $x \in A$, so gilt für alle $\tilde{x} \in A$ mit $d_X(x - \tilde{x}) \leq \frac{\epsilon}{L_x}$, dass

$$d_Y(f(x) - f(\tilde{x})) \leq L_x \frac{\epsilon}{L_x} = \epsilon .$$

(2) Jede global Lipschitz-stetige Funktion ist auch gleichmäßig stetig: Denn ist $\epsilon > 0$, so gilt für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $d_X(x_1, x_2) \leq \frac{\epsilon}{L}$

$$d(f(x_1) - f(x_2)) \leq L \frac{\epsilon}{L} = \epsilon .$$

(3) Eine global Lipschitz-stetige Funktion muss nicht differenzierbar sein: Ein Beispiel hierfür ist

$$f : \mathbb{R} \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R} .$$

(4) Nicht jede differenzierbare Funktion ist global Lipschitz-stetig, z.B.

$$f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}.$$

Diese Funktion ist allerdings lokal Lipschitz-stetig.

Allgemein gilt Folgendes:

LEMMA 3.18. *Es seien X, Y normierte Vektorräume und A eine offene, konvexe Teilmenge von X. Jede (Fréchet-)differenzierbare Funktion von A nach Y ist genau dann global Lipschitz-stetig, wenn die Ableitung beschränkt sind.*

BEWEIS. Es seien $g : A \to Y$ (Fréchet-)differenzierbar und $x_1, x_2 \in A$. Dann liegt die verbindende Linie innerhalb A, so dass wir die Funktion $\phi : [0, 1] \ni t \mapsto tx_1 + (1 - t)x_2 \in A$ definieren können. Somit ist $\Phi := g \circ \phi : [0, 1] \to Y$ stetig und – aufgrund der Kettenregel – auf $(0, 1)$ differenzierbar. Nach dem Lagrangeschen Mittelwertsatz gilt nun

$$\Phi(1) - \Phi(0) = \Phi'(\xi)$$

für ein $\xi \in (0, 1)$, d.h.

$$g(x_1) - g(x_2) = g'(\xi x_1 + (1 - \xi)x_2)(x_1 - x_2) .$$

Somit gilt

$$\|g(x_1) - g(x_2)\|_Y \leq \sup_{\tilde{x} \in A} \|g'(\tilde{x})\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \|x_1 - x_2\|_X \ .$$

Ist nun g' beschränkt, so ist also $\sup_{\tilde{x} \in A} \|g'(\tilde{x})\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ eine Lipschitz-Konstante für g. □

KOROLLAR 3.19. *Es seien X, Y normierte Vektorräume und A eine offene zusammenhängende Teilmenge von X. Jede (Fréchet-)differenzierbare Funktion von A nach Y ist lokal Lipschitz-stetig.*

BEWEIS. Ist $x \in A$, so findet man eine offene Umgebung O_x von x, sodass für alle Elemente $\tilde{x} \in O_x$ gilt, dass

$$\|f'(x) - f'(\tilde{x})\|_Y \leq 1 \quad \text{und somit} \quad \|f'(\tilde{x})\|_Y \leq 1 + \|f'(x)\| \ .$$

Deshalb ist die Einschränkung $f'_{|O_x}$ von f' auf O_x beschränkt und insbesondere, angesichts von Lemma 3.18, global (auf O_x!) Lipschitz-stetig. Da diese Aussage für alle $x \in A$ gilt, ist f lokal Lipschitz-stetig. □

Insbesondere: Eine auf einem Intervall definierte differenzierbare Funktion ist genau dann global Lipschitz-stetig, wenn ihre erste Ableitung beschränkt ist. Sie ist sicherlich lokal Lipschitz-stetig, falls die Ableitung auch stetig ist.

ANMERKUNG 3.20. (1) Die Summe zweier auf einem beschränkten Intervall definierten global Lipschitz-stetigen Funktionen ist auch global Lipschitz-stetig.
(2) Die Summe zweier lokal Lipschitz-stetigen Funktionen ist auch lokal Lipschitz-stetig.
(3) Das Produkt zweier auf einem beschränkten Intervall definierten global Lipschitz-stetigen Funktionen ist auch global Lipschitz-stetig.
(4) Das Produkt zweier lokal Lipschitz-stetigen Funktionen ist auch lokal Lipschitz-stetig.
(5) Die Verkettung zweier auf einem beschränkten Intervall definierten global Lipschitz-stetigen Funktionen ist auch global Lipschitz-stetig.
(6) Die Verkettung zweier lokal Lipschitz-stetigen Funktionen ist auch lokal Lipschitz-stetig.

BEISPIEL 3.21. • Die Funktionen $\sin$ und $\cos$ sind von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ global Lipschitz-stetig.
• Affine Funktionen der Form

$$x \mapsto Ax + b$$

sind von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, global Lipschitz-stetig für alle Matrizen $A \in M_d(\mathbb{R})$ und Vektoren $b \in \mathbb{R}^d$.
• Polynome wie

$$x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \ ,$$

$a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, sind nur dann auf $\mathbb{R}$ global Lipschitz-stetig, wenn sie auf ein beschränktes Intervall eingeschränkt werden. Sie sind aber stets lokal Lipschitz-stetig.
• Abbildungen der Form

$$y \mapsto p \cdot y + q \ ,$$

wobei $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sind Lipschitz-stetig falls p beschränkt ist.

□

BEISPIEL 3.22. Jede global Lipschitz-stetige Funktion ist natürlich lokal Lipschitz-stetig, das heißt: Jede Einschränkung einer global Lipschitz-stetigen Funktion ist wieder global Lipschitz-stetig. Erweiterungen einer global Lipschitz-stetigen Funktion müssen hingegen nicht zwingend global Lipschitz-stetig sein: Ein Beispiel hierfür bietet die Funktion

$$f : O \ni (x_1, x_2) \mapsto 3x_2^{\frac{2}{3}} \in \mathbb{R} ,$$

wobei $O := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$ ist. Dann erfüllt f keine globale Lipschitz-Bedingung (warum?). Hingegen erfüllt die Einschränkung von f auf

$$O_\epsilon := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq \epsilon\}$$

für ein beliebiges $\epsilon > 0$ die globale Lipschitz-Bedingung, und zwar dank dem Lemma 3.18 mit $L = 2\epsilon^{-\frac{1}{3}}$. □

Zum Beweis des wahrscheinlich wichtigsten Satzes der Theorie der Differenzialgleichungen, des Satzes von Picard–Lindelöf, benötigen wir die zwei folgenden Hilfssätze.

DEFINITION 3.23. *Ein **Fixpunkt** einer Funktion $f : X \to X$ ist ein Element x von X, für das gilt:*

$$f(x) = x .$$

Der folgende Fixpunktsatz besagt die Existenz und die Eindeutigkeit eines Fixpunktes einer strikten Kontraktion und wurde 1922 von Stefan Banach bewiesen.

SATZ 3.24. *Es seien (X, d) ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$. Ist f eine strikte Kontraktion, so hat f genau einen Fixpunkt.*

BEWEIS (R. PALAIS 2007). Es sei $L < 1$ eine Lipschitz-Konstante von f. Dank der Dreiecksungleichung gilt für alle $x_1, x_2 \in X$

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &\leq d(x_1, f(x_1)) + d(f(x_1), f(x_2)) + d(f(x_2), x_2) \\ &\leq d(x_1, f(x_1)) + Ld(x_1, x_2) + d(f(x_2), x_2) , \end{aligned}$$

und daher

$$d(x_1, x_2) \leq \frac{d(f(x_1), x_1) + d(f(x_2), x_2)}{1 - L} . \tag{3.5}$$

Betrachte nun für beliebige $n \in \mathbb{N}$ die n-fache Verkettung von f mit sich selbst, d.h.

$$f^n := \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n-Mal} , \tag{3.6}$$

welche offensichtlich selber Lipschitz-stetig ist, mit einer Lipschitz-Konstante $L^n < 1$, d.h. f^n ist für alle $n \in \mathbb{N}$ eine strikte Kontraktion. Wir wollen nun beweisen, dass für *jedes* x_0 die Folge $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, und somit konvergent (da X nach Voraussetzung vollständig ist). Tatsächlich gilt aufgrund von (3.5)

$$
\begin{aligned}
d(f^n(x_0), f^m(x_0)) &\leq \frac{d(f(f^n(x_0)), f^n(x_0)) + d(f(f^m(x_0)), f^m(x_0))}{1-L}, \\
&= \frac{d(f^n(f(x_0)), f^n(x_0)) + d(f^m(f(x_0)), f^m(x_0))}{1-L} \\
&\leq \frac{L^n d(f(x_0), x_0) + L^m d(f(x_0), x_0)}{1-L} \\
&= \frac{L^n + L^m}{1-L} d(f(x_0) - x_0) ,
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

welches gegen 0 konvergiert, da $L < 1$ ist.

Es sei nun $\tilde{x}$ der Grenzwert der Folge $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gilt

$$f(\tilde{x}) = f\left(\lim_{n\to\infty} f^n(x_0)\right) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x_0) = \tilde{x} ,$$

d.h., $\tilde{x}$ ist tatsächlich ein Fixpunkt von f.

Dass f *höchstens* einen Fixpunkt hat, folgt daraus, dass laut (3.5) der Abstand zwischen je zwei Fixpunkten $\tilde{x}, \tilde{\tilde{x}}$ Null sein muss. □

ANMERKUNG 3.25. Die obige Beweismethode ist konstruktiv, d.h., sie kann auch verwendet werden, um den Fixpunkt zu finden. Dabei ist es sehr wichtig, dass eine ungeschickte Wahl von x_0 die Konvergenz der Folge $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht beeinträchtigen kann. Lässt man $m \to \infty$ in (3.7), so erhält man die Konvergenzrate

$$d(f^n(x_0), \tilde{x}) \leq \frac{L^n}{1-L} d(f(x_0), x_0) . \tag{3.8}$$

ANMERKUNG 3.26. Über den Banachschen Fixpunktsatz hinaus findet auch ein weiterer Fixpunktsatz Anwendung, den Johannes Weissinger 1952 bewies. Dieser besagt

> Es seien (X, d) ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum, $f : X \to X$, und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,\infty)$ eine Folge, deren assoziierte Reihe konvergiert (d.h., $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$). Es gelte
>
> $$d(f^{(n)}(x_1), f^{(n)}(x_2)) \leq a_n d(x_1, x_2) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } x_1, x_2 \in X ,$$
>
> wobei f^n wie in (3.6) definiert wird. Dann hat f genau einen Fixpunkt.

Der Beweis ist eine nicht allzu schwierige und dennoch interessante Übungsaufgabe. Dass der Fixpunktsatz von Banach überhaupt ein Spezialfall des Weissingerschen Fixpunktsatzes ist, folgt unmittelbar aus der Konvergenz der geometrischen Reihe.

LEMMA 3.27. *Es sei X ein normierter Raum und $I \times K$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R} \times Y$. Ist $f : I \times K \to X$ stetig, sowie auch lokal Lipschitz stetig in der zweiten Variablen, so ist f bereits global Lipschitz-stetig in der zweiten Variablen, d.h., es gibt ein $L > 0$ mit*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \qquad \forall t \in I,\ x, y \in K.$$

BEWEIS. Aufgrund der lokalen Lipschitz-Stetigkeit gibt es für jedes $t \in I$ und jedes $x \in K$ zwei offene Umgebungen $B_{\epsilon_t}(t)$ und $B_{\epsilon_x}(x)$, für die gilt, dass

$$\|f(s, y) - f(s, z)\| \leq L_{t,x}\|y - z\|, \qquad s \in B_{\epsilon_t}(t),\ y, z \in B_{\epsilon_x}(x).$$

Dank dem Satz von Heine–Borel gibt es eine endliche offene Überdeckung von $I \times K$ durch Kugeln $B_{\epsilon_{t_1}}(t_1) \times B_{\frac{1}{2}\epsilon_{x_1}}(x_1), \dots, B_{\epsilon_{t_N}}(t_N) \times B_{\frac{1}{2}\epsilon_{x_N}}(x_N)$. Auch ist $f(I \times K)$ beschränkt, also

$$\|f(t,x)\| \leq M, \qquad \forall t, x \in I \times K.$$

Wir definieren

$$\delta := \frac{1}{2}\min\{\epsilon_{x_1}, \dots \epsilon_{x_N}\} > 0$$

und

$$L := \max\left\{L_{t_1,x_1}, \dots L_{t_N,x_N}, \frac{2M}{\delta}\right\} > 0$$

Nun sind wir in der Lage zu zeigen, dass f global Lipschitz-stetig ist. Es seien $t \in I$ und $x, y \in K$. Wir können eine Menge in der endlichen offenen Überdeckung von $I \times K$ finden, etwa $B_{\epsilon_{t_k}}(t_k) \times B_{\frac{1}{2}\epsilon_{x_k}}(x_k)$, die (t,x) enthält. Nun liegt (t,y) in $B_{\epsilon_{t_k}}(t_k) \times B_{\epsilon_{x_k}}(x_k)$, falls $\|x-y\| < \delta$. Insgesamt gilt

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L_{t_k,x_k}\|x-y\| \leq L\|x-y\|\,, \qquad \text{falls } \|x-y\| \leq \delta,$$

sowie auch

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \frac{2M}{\delta}\delta \leq L\|x-y\|\,, \qquad \text{falls } \|x-y\| \geq \delta,$$

womit die Aussage bewiesen ist. □

Wir wollen jetzt den Existenz- und Eindeutigkeitssatz beweisen, den Ernst Leonard Lindelöf und Charles Emile Picard unabhängig voneinander am Anfang der 1890er Jahre zeigen konnten.

SATZ 3.28 (Satz von Picard–Lindelöf). *Es sei $f : (a,b) \times O \to Y$ eine stetige, in der zweiten Variablen lokal Lipschitz-stetige Funktion, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und O eine offene Teilmenge eines endlichdimensionalen normierten Raumes Y sind. Dann gibt es zu jedem $(t_0, x_0) \in D := (a,b) \times O$ ein $\alpha > 0$, sodass das Cauchy-Problem*

$$y'(t) = f\left(t, y(t)\right), \quad t \in (a,b), \qquad y(t_0) = y_0\,,$$

genau eine Lösung

$$y : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to O$$

hat.

Anders gesagt: Ist f lokal Lipschitz stetig, so ist das mit f assoziierte Cauchy-Problem eindeutig lösbar – allerdings nur lokal. Im Folgenden werden wir auch eine hinreichende Bedingung für die *globale* Lösbarkeit angeben.

BEWEIS. Betrachte $\alpha, \beta > 0$ mit $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \subset (a,b)$ und $\overline{B_\beta(y_0)} \subset O$: Das ist sicherlich möglich, da $(a,b) \times O$ eine offene Menge ist.

Da $K := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B_\beta(y_0)}$ kompakt in $\mathbb{R} \times Y$ ist, folgt aus der Stetigkeit von f, dass f beschränkt ist, etwa

$$\|f(t,x)\| \leq M \qquad \forall (t,x) \in K.$$

Darüber hinaus gibt es dank Lemma 3.27 ein $L > 0$, so dass

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L \qquad \forall (t,x), (t,y) \in K.$$

Es sei

$$\alpha_0 := \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{M}, \frac{1}{2L}\right\} . \tag{3.9}$$

Wir definieren eine Abbildung – manchmal **Picard-Operator** genannt –

$$T : C([t_0-\alpha_0, t_0+\alpha_0]; O) \to C([t_0-\alpha_0, t_0+\alpha_0]; Y)$$

dadurch, dass jede Funktion $Ty := T(y)$ selber durch

$$(Ty)(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))\, ds, \qquad y \in C([t_0-\alpha, t_0+\alpha]; O),\ t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha] , \tag{3.10}$$

definiert wird. Wir wollen nun zeigen, dass T genau einen Fixpunkt $\tilde{y}$ hat: In Anbetracht des Fundamentalsatzes der Differenzial- und Intergralrechnung ist dies zu Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Cauchy-Problems äquivalent.

Den gesuchten Fixpunkt $\tilde{y}$ wird der obige Satz von Banach liefern. Dazu müssen wird

- einen vollständigen metrischen Raum Ω einführen;
- überprüfen, dass Ω unter T invariant ist;
- zeigen, dass $T : \Omega \to \Omega$ strikt kontraktiv ist.

Betrachte dazu die Menge

$$\Omega := \left\{ y \in C([t_0-\alpha_0, t_0+\alpha_0]; Y) : y(t_0) = x_0 \text{ and } \max_{t_0-\alpha\le t\le t_0+\alpha} \|y(t) - x_0\|_Y \le \beta_0 \right\} .$$

Sie ist zwar kein Vektorraum, aber immerhin eine abgeschlossene Teilmenge von $C([t_0-\alpha_0, t_0+\alpha_0]; Y)$, wobei $C([t_0-\alpha_0, t_0+\alpha_0]; Y)$ wiederum ein Banachraum bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_{C([t_0-\alpha_0,t_0+\alpha_0];Y)} = \|\cdot\|_\infty$ ist (da Y selber ein Banachraum ist). Somit ist Ω ein vollständiger metrischer Raum, bzgl. der von der Norm induzierten Metrik.

Wir zeigen nun, dass $T(\Omega) \subset \Omega$: Tatsächlich gilt für alle $y \in \Omega$ nach Definition von Ω

$$y(I) \subset \overline{B_{\beta_0}(x_0)}$$

und insbesondere liegt y in der Definitionsmenge von T, da $\overline{B_{\beta_0}(x_0)} \subset O$. Außerdem gilt offensichtlich $T(y)(t_0) = x_0$. Schließlich gilt

$$\|T(y)(t) - y_0\|_Y = \left\| \int_{t_0}^t f(s, y(s))\, ds \right\|_Y \le \alpha_0 \max_{(t,\xi)\in K} \|f(t,\xi)\| \overset{(3.9)}{\le} \frac{\beta_0}{M} M = \beta_0 .$$

Abschließend zeigen wir, dass T eine strikte Kontraktion ist. Es seien nämlich $y, z \in \Omega$, $t_0 - \alpha_0 \le t \le t_0 + \alpha_0$: Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|T(y)(t) - T(z)(t)\|_Y &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, y(s)) - f(s, z(s))\, ds \right\|_Y \\
&\le \alpha_0 \max_{t_0-\alpha\le t\le t_0+\alpha} \|f(t, y(t)) - f(t, z(t))\|_Y \\
&\le \alpha_0 L \max_{t_0-\alpha\le t\le t_0+\alpha} \|y(t) - z(t)\|_Y \\
&\overset{(3.9)}{\le} \frac{1}{2} \|y - z\|_{C([t_0-\alpha_0,t_0+\alpha_0];Y)} ,
\end{aligned}$$

was die Aussage liefert. □

ANMERKUNG 3.29. Der entscheidende Schritt im Beweis des Satzes 3.28 ist die Anwendung des Fixpunktsatzes von Banach. Weil dessen Beweis wiederum konstruktiv ist, liegt nun ein expliziter Algorithmus vor, um den Fixpunkt $\tilde{y}$ von T – und somit die Lösung $\tilde{y}$ der Differenzialgleichung – durch aufeinander folgende Approximationen zu finden. Genauer gesagt liefert (3.8) für die Lipschitz-stetige Funktion T, mit Lipschitz-Konstante $L \leq \frac{1}{2}$ eine Konvergenzabschätzung

$$\begin{aligned}\|y_n - \tilde{y}\|_{C([t_0-\alpha_0,t_0+\alpha_0];Y)} &\leq 2^{1-n}\|y_1 - y_0\|_{C([t_0-\alpha_0,t_0+\alpha_0];Y)} \\ &= 2^{1-n} \max_{t_0-\alpha\leq t\leq t_0+\alpha} \left\| \int_{t_0}^{t} f(s,y_0)\, ds \right\|_{C([t_0-\alpha_0,t_0+\alpha_0];Y)} .\end{aligned}$$

und insbesondere

$$\|y_n - \tilde{y}\|_{C([t_0-\alpha_0,t_0+\alpha_0];Y)} \leq 2^{1-n} \left\| \int_{t_0-\alpha}^{t_0+\alpha} f(s,y_0)\, ds \right\|_{C([t_0-\alpha_0,t_0+\alpha_0];Y)} ,$$

falls $f(s,x) \geq 0$ für alle $(s,x) \in (a,b) \times O$.

Wie groß α ist, kann man aus dem obigen Beweis nicht nachvollziehen: In der Tat kann man typischerweise den Lösbarkeitsbereich der Differenzialgleichung erweitern, indem man $t_0 + \alpha$ und $\tilde{y}(t_0 + \alpha)$ als Anfangszeit bzw. -wert einer neuen Differenzialgleichung betrachtet. Dieses Verfahren kann selbstverständlich iterativ wiederholt werden. Es kann dabei sein, dass die Länge der Lösbarkeitsintervalle immer kleiner wird und schließlich gegen 0 konvergiert; oder aber dass man damit die ganze Definitionsmenge von f zusammenflicken kann – was zu einer *globalen* Lösbarkeit führen würde.

Zumindest kann man aber sagen, dass es ein **maximales Lösbarkeitsintervall** gibt, über das hinaus die Lösung nicht mehr fortsetzbar ist.

SATZ 3.30. *Es sei $f : (a,b) \times O \to \mathbb{R}$ eine stetige, in der zweiten Variablen lokal Lipschitz-stetige Funktion, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und O eine offene Teilmenge eines endlichdimensionalen normierten Raumes Y sind. Dann gibt es zu jedem $(t_0, x_0) \in D := (a,b) \times O$ genau ein offenes Intervall $(t_-, t_+) \subset (a,b)$ und eine Lösung $y_\infty : (t_-, t_+) \to O$, so dass kein weiteres Intervall, das (t_-, t_+) enthält, Definitionsmenge einer Lösung ist.*

BEWEIS. Die Beweisidee ist genau diejenige, die wir gerade gesehen haben: das Zusammenflicken verschiedener lokalen Lösungen.

Betrachte zuerst ein Intervall $I_0 := [t_0 - \alpha_0, t_0 + \alpha_0]$ und die darauf definierte Lösung $\tilde{y}$: Ihre Existenz folgt aus dem Satz 3.28. Betrachtet man nun für die selbe Differenzialgleichung

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

ein Cauchy-Problem, das *nicht* mit dem Anfangswert $y(t_0) = x_0$ versehen wird, sondern mit

$$y(t_1^+) = x_1 ,$$

wobei

$$t_1^+ := t_0 + \alpha_0 \quad \text{und} \quad x_1 := y(t_0 + \alpha_0) .$$

Die Funktion f erfüllt nach wie vor die Voraussetzungen des Satzes 3.28 und somit gibt es ein $\alpha_1 > 0$ und eine eindeutige, auf $I_1 := [t_1^+ - \alpha_1, t_1^+ + \alpha_1]$ definierte Lösung y_1. Die beiden Intervalle $[t_0 - \alpha_0, t_0 + \alpha_0]$, $[t_1^+ - \alpha_1, t_1^+ + \alpha_1] = [t_0 + \alpha_0 - \alpha_1, t_0 + \alpha_0 + \alpha_1]$ sind aber nicht disjunkt, so dass der Satz von Picard–Lindelöf (auf dem mit f assoziierten Cauchy–Problem mit Anfangswert $y(t_1^+) = x_1$ angewendet) insbesondere zeigt, dass y_0, y_1 auf ihrer gemeinsamen Definitionsmenge übereinstimmen müssen. Somit können wir y_0, y_1 „zusammenkleben“ und die (auf einem strikt größeren Intervall definierte) Funktion

$$\tilde{y}_1 : t \mapsto \begin{cases} y_0(t) & t \in [t_0 - \alpha_0, t_0 + \alpha_0] \, , \\ y_1(t) & t \in [t_0 + \alpha_0, t_0 + \alpha_0 + \alpha_1] \, . \end{cases}$$

erhalten, und ähnlich kann man y_0 auch nach links, d.h. für $y(t_1^-) = y(t_0 - \alpha_0)$ (wobei $t_1^- := t_0 - \alpha_0$) fortgesetzt werden. Dieses Verfahren kann iterativ wiederholt werden, um zwei monotone Folgen $(t_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(t_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ zu bekommen. Definieren wir nun die Zahlen

$$\begin{aligned} t_+ &:= \sup\{t_0 + \alpha_+ \in \mathbb{R} : \text{ das Cauchy-Problem hat auf } [t_0, t_0 + \alpha_+] \text{ eine eindeutige Lösung}\} \\ &= \lim_{n\to\infty} t_n^+ \in (t_0, \infty] \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} t_- &:= \inf\{t_0 - \alpha_- \in \mathbb{R} : \text{ das Cauchy-Problem hat auf } [t_0 - \alpha_-, t_0] \text{ eine eindeutige Lösung}\} \\ &= \lim_{n\to\infty} t_n^- \in [-\infty, t_0) \, , \end{aligned}$$

dann liefert der Satz von Picard–Lindelöf wiederum, dass das Cauchy-Problem auf (t_-, t_+) eine Lösung hat, welche notwendigerweise eindeutig sein muss. □

ANMERKUNG 3.31. Der obige Beweis ist leider nicht konstruktiv und liefert insbesondere keine Abschätzungen über t_-, t_+. Wir werden spter tatsächlich sehen, dass $t_- = -\infty$ und/oder $t_+ = \infty$ sein kann, oder aber dass $t^\pm$ beliebig nah an der Anfangszeit t_0 sein können. Eine elementare Abschätzung für t_+, t_- gelingt, wenn f stetig differenzierbar auf einer kompakten Menge $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B_\beta(y_0)}$ definiert ist, so dass sowohl f als auch f' beschränkt sind. Dann folgt direkt aus (3.9), dass die Abschätzung

$$t_+ \geq t_0 + \alpha_0 = t_0 + \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{\|f\|_\infty}, \frac{1}{2\|f'\|_\infty}\right\} \tag{3.11}$$

gilt.

Wendet man den Fixpunktsatz von Weissinger anstatt des Fixpunktsatzes von Banach an, so kann man diese Abschätzung leicht verbessern und man erhält

$$t_+ \geq t_0 + \alpha_0 = t_0 + \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{\|f\|_\infty}\right\} \tag{3.12}$$

und entsprechend

$$t_- \leq t_0 - \alpha_0 = t_0 - \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{\|f\|_\infty}\right\} \, . \tag{3.13}$$

Schließlich zeigen wir eine Abschätzung über den Abstand von Bahnen zweier verschiedenen Gleichungen mit zwei verschiedenen Anfangswerten. Dazu benötigen wir das folgende Lemma, das Thomas Hakon Grönwall 1919 in einer verwandter Form bewies und Richard Bellman 1943 folgendermaßen erweiterte.

LEMMA 3.32 (Gronwallsches Lemma). *Ist $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ eine Funktion, welche*

$$\psi(t) \le \alpha + \int_0^t \beta(s)\psi(s)\, ds \tag{3.14}$$

für ein $\alpha \ge 0$ und ein $\beta : [0,\infty) \to [0,\infty)$ erfüllt . Dann gilt

$$\psi(t) \le \alpha e^{\int_0^t \beta(s)\, ds}, \qquad t \ge 0 .$$

BEWEIS. Es sei zuerst $\alpha > 0$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \log\left(\alpha + \int_0^t \beta(s)\psi(s)\, ds\right) = \frac{\beta(t)\psi(t)}{\alpha + \int_0^t \beta(s)\psi(s)\, ds} \le \beta(t) .$$

Integriert man beide Seiten zwischen 0 und t, so erhält man

$$\log\left(\alpha + \int_0^t \beta(s)\psi(s)\, ds\right) - \log\alpha \le \int_0^t \beta(s)\, ds , \qquad t \ge 0 .$$

Exponenziert man beide Seiten und wendet man (3.14) an, so bekommt man

$$\frac{\psi(t)}{\alpha} \le \frac{\alpha + \int_0^t \beta(s)\psi(s)\, ds}{\alpha} \le e^{\int_0^t \beta(s)\, ds} , \qquad t \ge 0 .$$

Da diese Abschätzung für beliebiges $\alpha > 0$ gilt, gilt sie auch im Grenzübergang $\alpha \to 0$. □

SATZ 3.33. *Es seien $f, g : (a,b) \times O \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und O eine offene Teilmenge eines endlichdimensionalen normierten Raumes Y sind. Ist f in der zweiten Variablen lokal Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L, dann gilt für jedes $t_0 \in (a,b)$ und alle $x_0, y_0 \in O$ die Abschätzung*

$$\|x(t) - y(t)\| \le \|x_0 - y_0\| e^{L|t-t_0|} + \frac{M}{L}\left(e^{L|t-t_0|} - 1\right) .$$

Dabei ist $M := \sup_{(t,x)\in(a,b)\times O} |f(t,x) - g(t,x)|$ und x, y sind Lösungen der Cauchy-Probleme, die mit den Funktionen f, g assoziiert sind, jeweils mit Anfangsbedingungen $x(t_0) = x_0$ bzw. $y(t_0) = y_0$.

BEWEIS. Es sei o.B.d.A. $t_0 = 0$ (warum darf man dies annehmen?). Dann gilt nach Voraussetzung

$$\begin{aligned}
\|x(t) - y(t)\| &\le \|x_0 - y_0\| + \int_0^t \|f(s, x(s)) - g(s, y(s))\|\, ds \\
&\le \|x_0 - y_0\| + \int_0^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\|\, ds + \int_0^t \|f(s, y(s)) - g(s, y(s))\|\, ds \\
&\le \|x_0 - y_0\| + \int_0^t L\|x(s) - y(s)\|\, ds + \int_0^t M ds
\end{aligned}$$

Führt man die Funktion

$$\psi : t \mapsto \|x(t) - y(t)\| + \frac{M}{L}, \qquad t \ge 0,$$

ein, so wird die letzte Abschätzung zu

$$\begin{aligned}\psi(t) - \frac{M}{L} &\leq \|x_0 - y_0\| + L\int_0^t \psi(s)ds \\ &= \alpha - \frac{M}{L} + \int_0^t \beta(s)\psi(s)\, ds\ , \qquad t \geq 0\end{aligned}$$

für $\alpha := \|x_0 - y_0\| + \frac{M}{L}$ und $\beta(t) :\equiv L$. Die Aussage folgt nun aus dem Gronwallschen Lemma. □

ANMERKUNG 3.34. Gilt

$$\sup_{(t,x)\in(a,b)\times O} |f(t,x) - g(t,x)| < \infty\ ,$$

so gilt im Allgemeinen nicht, dass die Lipschitz-Stetigkeit von f auch die Lipschitz-Stetigkeit von g impliziert. Denn gibt es für alle $t \in (a,b)$ und alle $x \in O$ eine Umgebung O_x von x und $L_x > 0$ so, dass

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq L_x\|x_1 - x_2\| \qquad \text{für alle } t \in (a,b) \text{ und alle } x_1, x_2 \in O_x$$

gilt, so folgt lediglich

$$\begin{aligned}\|g(t,x_1) - g(t,x_2)\| &\leq \|g(t,x_1) - f(t,x_1)\| + \|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| + \|f(t,x_2) - f(t,x_2)\| \\ &\leq 2M + L_x\|x_1 - x_2\| \qquad \text{für alle } t \in (a,b) \text{ und alle } x_1, x_2 \in O_x\ :\end{aligned}$$

Diese Abschätzung kann im Allgemeinen nicht verbessert werden. Somit zeigt der obige Satz nur, dass *falls eine Lösung des mit g assoziierten Cauchy-Problems existiert*, sie sich nicht von der mit f assoziierten Cauchy-Problem Lösung beliebig weit entfernen kann.

ANMERKUNG 3.35. Es folgt insbesondere, dass für jedes y_0 ein Intervall I_{y_0} existiert, auf dem eine eindeutige Lösung des Cauchy-Problems mit Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ definiert ist; Man spricht von verschiedenen *Bahnen* der Lösung. Die Eindeutigkeit dieser Lösungen impliziert, dass diese Bahnen sich nicht treffen können (warum?).

Es stellt sich also die Frage, wann das maximale Existenzintervall für jede Anfangszeit t_0 und jeden Anfangswert x_0 mit der gesamten Definitionsmenge von f übereinstimmt. Das folgende Beispiel zeigt, dass diese Frage unter Umständen kompliziert sein kann.

BEISPIEL 3.36. Betrachte das Cauchy-Problem

$$y'(t) = (y(t))^{\frac{2}{3}}\ , \qquad y(-1) = -\frac{1}{27}\ .$$

Die Funktion $f : x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$ ist differenzierbar *mit beschränkter Ableitung* in dem Komplement jeder Umgebung der 0, nicht aber auf $\mathbb{R}$. Somit ist f nicht für $x = 0$ lokal Lipschitz-stetig: Das Cauchy-Problem hat in jedem Intervall $(-\infty, a_1)$ oder aber (a_2, ∞) eine eindeutige Lösung, durch die Singularität in der 0 wird aber möglich, dass die *zwei* differenzierbaren Funktionen

$$y : t \mapsto \begin{cases} \left(\frac{t}{3}\right)^3 & t \leq 0\ , \\ 0 & t \geq 0\ . \end{cases}$$

und

$$z : t \mapsto \left(\frac{t}{3}\right)^3 \quad t \in \mathbb{R} \,,$$

verschiedene Lösungen des Cauchy-Problems sind auf ganz $\mathbb{R}$. □

BEISPIEL 3.37. Die Funktion $[0,1] \ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ ist stetig, aber nicht einmal lokal Lipschitz-stetig, denn ihre Ableitung ist unbeschränkt für $x \to 0$. (Ihre Einschränkung auf $[a,1]$ ist aber für beliebige $a > 0$ global Lipschitz-stetig.)

Deshalb erfüllt das Cauchy-Problem

$$y'(x) = \sqrt{y(x)}, \qquad y(0) = 0,$$

die Bedingungen des Satzes von Picard–Lindelöf nicht. Tatsächlich hat das Cauchy–Problem keine eindeutige Lösung: Sowohl die Funktion $x \mapsto 0$ als auch die Funktion $x \mapsto \frac{1}{4}x^2$ sind (globale) Lösungen des Problems. Allgemeiner sieht man, dass sowohl $x \mapsto 0$ als auch, für alle $C > 0$, die Funktionen $x \mapsto \frac{1}{4}(x-C)^2$ globale Lösungen der Differenzialgleichung

$$y'(x) = \sqrt{y(x)}, \qquad x \in [0,1] \,,$$

sind. □

BEISPIEL 3.38. Ähnlich verhält sich die Funktion $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$, welche lokal, aber nicht global Lipschitz-stetig ist. Somit liefert der Satz von Picard–Lindelöf wohl eine Lösung, die sich allerdings innerhalb endlicher Zeit aufblasen kann. Zum Beispiel zur Anfangsbedingung

$$y(0) = 1$$

hat die Gleichung

$$y'(t) = (y(t))^2 \qquad t \leq 1$$

die einzige Lösung

$$y : t \mapsto \frac{1}{1-t}$$

welche zwar für alle $t < 1$ definiert ist, doch für $t \to 1-$ uneigentlich gegen $+\infty$ konvergiert und somit in $t = 1$ auch nicht stetig fortsetzbar ist.

BEISPIEL 3.39. Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f(t,x) = p(t)x + q(t)$ für stetige Funktionen $p, q : I \to \mathbb{R}$, so ist f stetig. Für alle t gibt es eine Konstante $L_t = p(t)$ (die nur von t abhängt!), so dass

$$|f(t,x) - f(t,z)| = |p(t)x + q(t) - p(t)z - q(t)| = |p(t)x - p(t)z| = |p(t)|\,|x-z|.$$

Also ist f bzgl. der zweiten Variable global Lipschitz-stetig und somit erfüllt die Funktion f die Voraussetzungen des Satzes von Picard–Lindelöf. Die Differenzialgleichung

$$y'(t) = f(t, y(t)) = p(t)y(t) + q(t)$$

besitzt für jede Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ (mit t_0 Häufungspunkt von I) eine eindeutig bestimmte globale Lösung. □

ANMERKUNG 3.40. Lipschitz-Stetigkeit ist keine trivial zu erfüllende Bedingung. Tatsächlich kann man auch schon dann Aussagen treffen, wenn f lediglich stetig ist: Das ist die Botschaft des nächsten Kapitels 4. Ist X unendlichdimensional, so kann man selbst auf Stetigkeit verzichten, so lang andere Eigenschaften gelten. Dies ist das Thema der *Halbgruppentheorie*, die allerdings weit über den Bereich dieser Vorlesung geht.

ANMERKUNG 3.41. Wir haben im Beispiel 3.39 gesehen, dass affine (und insbesondere lineare) Funktionen Lipschitz-stetig sind. Somit hätte die bloße Existenz und Eindeutigkeit (für jeden Anfangswert) der Lösung von (5.16) bereits durch Anwendung der Sätze von Picard–Lindelöf gezeigt werden können.

KAPITEL 4

Der Satz von Peano

Die Bedingung der Lipschitz-Stetigkeit ist ziemlich stark. Verzichtet man darauf, so kann man noch die Lösbarkeit eines Cauchy-Problems

$$y'(t) = f(t, y(t)) , \qquad y(t_0) = y_0 ,$$

folgern. Dieses Kapitel ist dazu gewidmet, einen reinen Existenzsatz (dabei ist die *Existenz einer Lösung* gemeint) zu beweisen, der von Giuseppe Peano stammt: Er formulierte ihn 1886 (mit inkorrektem Beweis) und konnte ihn dann 1890 (korrekt) beweisen.

Wie schon im Fall des Satzes von Picard–Lindelöf beruht der Beweis im Wesentlichen auf einer Idee: Dort war die Pointe die äquivalente Formulierung eines Cauchy-Problem als Fixpunktaufgabe (dank dem Fundamentalsatz der Differenzial- und Integralrechnung), hier die Möglichkeit, den Satz von Taylor anzuwenden und äquivalent nach Funktionen y zu suchen, welche für ein gegebenes (kleines) $h > 0$

$$\begin{aligned} y(t_0 + h) &= y(t_0) + y'(t_0)h + o(h) \\ &\overset{!}{=} y_0 + f(t_0, y_0)h + o(h) \end{aligned}$$

erfüllen. Da der Fehlerterm schneller als linear in h verschwindet, liegt der Ansatz nahe, eine Funktion y_h zu definieren, indem man ihre Werte auf der diskreten Menge

$$\{t_n := t_0 + nh : n \in \mathbb{N}\}$$

iterativ durch

$$y_h(t_{n+1}) := y_h(t_n) + f(t_n, y_n(t_n))h \quad \text{für } t_n := t_0 + nh , \qquad n \in \mathbb{N} ,$$

definiert, und dann in den restlichen Elementen von $\mathbb{R}$ linear interpoliert, d.h.,

$$y_h(t_n + sh) = y_h(t_n) + s(y_h(t_{n+1}) - y_h(t_n)), \qquad s \in [0, 1] .$$

Durch die lineare Interpolation wird man selbstverständlich beliebig große Fehler

$$y - y_h$$

zulassen müssen. Betrachtet man aber eine entsprechende Funktionenfamilie $(y_h)_{h>0}$ und lässt man $h \to 0$, so werden aufgrund der Differenzierbarkeit von y diese Fehler immer kleiner werden. Sinngemäß sollte diese Funktionenfamilie für $h \to 0$ einen Grenzwert haben, der gleichzeitig die Lösung des Cauchy-Problems ist. Dies ist die Grundidee des *Eulerschen Verfahrens*.

Um die Konvergenz von $(y_h)_{h>0}$ für $h \to 0$ zu beweisen, werden wir die *Sätze von Ascoli–Arzelà* bzw. *von Heine–Cantor* in den folgenden Versionen verwenden.

SATZ 4.1. *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes beschränktes Intervall und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichgradig stetige Folge von Funktionen von I nach $\mathbb{R}$, d.h. für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass*

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \epsilon \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \text{ und alle } x, y \text{ mit } |x-y| < \delta\ .$$

Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zudem beschränkt, *d.h., gibt es $M > 0$ mit*

$$|f_n(x)| \leq M \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \text{ und alle } x \in I\ ,$$

so hat $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

SATZ 4.2. *Es seien $Q \subset \mathbb{R}^d$ eine abgeschlossene beschränkte Menge, $d \in \mathbb{N}$, und $f : Q \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f bereits gleichmäßig stetig, d.h. für alle $\epsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, so dass*

$$|f(w) - f(z)| \leq \epsilon \quad \text{für alle } w, z \in Q \text{ mit } \|w - z\| < \delta\ .$$

Der Satz von Peano ist nun der Folgende.

SATZ 4.3. *Es seien $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ und $\alpha, \beta > 0$. Es sei weiter $f : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times [y_0 - \beta, y_0 + \beta] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann hat das Cauchy-Problem*

$$y'(t) = f(t, y(t))\ , \qquad y(t_0) = y_0\ ,$$

(mindestens) eine Lösung

$$y : [t_0 - \tilde{\alpha}, t_0 + \tilde{\alpha}] \to \mathbb{R},$$

wobei

$$\tilde{\alpha} := \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{\|f\|_\infty}\right\}\ .$$

Beachte, dass die Funktion f stetig auf der kompakten Menge ist und somit nach dem Satz von Weierstraß auch beschränkt ist, d.h. $\|f\|_\infty < \infty$.

BEWEIS. Man sieht, dass für alle $t, s \in [t_0, t_0 + \tilde{\alpha}]$

$$y_h(t) \in [y_0 - \beta, y_0 + \beta]\ ,$$

denn

$$\begin{aligned} y_h(t_n) &= y(t_{n-1}) + f(t_{n-1}, y_h(t_{n-1}))h \\ &= y(t_{n-2}) + f(t_{n-2}, y_h(t_{n-2}))h + f(t_{n-1}, y_h(t_{n-1}))h \\ &= \ldots \\ &= y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k, y_h(t_k))h \end{aligned} \tag{4.1}$$

und somit

$$|y_h(t_n) - y_0| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k, y_h(t_k))h\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|f\|_\infty h = \|f\|_\infty nh \leq \|f\|_\infty \tilde{\alpha} \leq \beta\ ,$$

da die Zahl

$$nh = t_n - t_0 \tag{4.2}$$

maximal die Länge des Intervalls $[t_0, t_0 + \tilde{\alpha}]$ beträgt. Damit ist die Abschätzung

$$y_h(t) \in [y_0 - \beta, y_0 + \beta]$$

gezeigt, zunächst für an allen Stützstellen t und somit natürlich auch für die restlichen Argumente t, in denen man die Funktion mittels linearer Interpolation definiert.

Darüber hinaus gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$

$$|y_h(t_m) - y_h(t_n)| = |\sum_{k=n+1}^{m} f(t_k, y_h(t_k))h| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|f\|_\infty h = \|f\|_\infty (m-n)h = \|f\|_\infty |t_m - t_n| \ .$$

Somit ist auch

$$|y_h(t) - y_h(s)| \leq \|f\|_\infty |t-s|$$

an den Stützstellen gezeigt und bleibt auch unter linearer Interpolation erhalten.

Somit ist die Familie $(y_h)_{h>0}$ beschränkt und gleichgradig stetig. Da aber der Satz von Ascoli–Arzelà für Funktionen*folgen* gilt, wollen nur eine *diskrete* Teilfamilie betrachten, etwa $(y_{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$. Als Teilfamilie von $(y_h)_{h>0}$ ist $(y_{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls beschränkt und gleichgradig stetig: Somit hat $(y_{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(y_{\frac{1}{n_k}})_{k\in\mathbb{N}}$, die gleichmäßig konvergiert – etwa gegen y. Es bleibt zu zeigen, dass y das Cauchy-Problem löst – oder äquivalent dazu, dass y ein Fixpunkt des Picard-Operators T in (3.10) ist. Um dies zu tun wollen wir zeigen, dass für beliebiges t

$$\left| y_h(t) - y_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, y_h(s))\, ds \right| \to 0 \qquad \text{für } h \to 0.$$

Tatsächlich gilt angesichts von (4.1) und (4.2)

$$\begin{aligned}
\left| y_h(t_n) - y_0 - \int_{t_0}^{t_n} f(s, y_h(s))\, ds \right| &\leq \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k, y_h(t_k))h - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{1}_{[t_0,t_n]}(s) f(s, y_h(s)) ds \right| \\
&\leq \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k, y_h(t_k)) \int_{t_k}^{t_{k+1}} 1\, ds - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{1}_{[t_0,t_n]}(s) f(s, y_h(s)) ds \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{1}_{[t_0,t_0+\tilde{\alpha}]}(s)\, |f(t_k, y_h(t_k)) - f(s, y_h(s))|\, ds \\
&\overset{(*)}{\leq} \delta(h) \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{1}_{[t_0,t_0+\tilde{\alpha}]}(s) ds \\
&= |t - t_0| \delta(h) \to 0 \ ,
\end{aligned}$$

wobei $\mathbf{1}_{[t_0,t_0+\tilde{\alpha}]}$ die charakterische Funktion der Menge $[t_0, t_0+\tilde{\alpha}]$ ist. Dabei gilt $(*)$, da f aufgrund des Satzes von Heine–Cantor gleichmäßig stetig ist. Die Abschätzung überträgt sich wieder von den Stützstellen auf beliebige t. Somit erhält man

$$\begin{aligned} y(t) = \lim_{k\to\infty} y_{\frac{1}{n_k}}(t) &= y_0 + \lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, y_{\frac{1}{n_k}}(s))\, ds \\ &= y_0 + \int_{t_0}^{t} \lim_{k\to\infty} f(s, y_{\frac{1}{n_k}}(s))\, ds \\ &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, \lim_{k\to\infty} y_{\frac{1}{n_k}}(s)\right)\, ds \\ &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, y(s)\right)\, ds\,, \end{aligned}$$

wobei die Gleichungen zum einen aus der gleichmäßigen Konvergenz von $(y_{\frac{1}{n_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen y folgen, zum anderen aus der Stetigkeit von f. Somit ist die Existenz einer Lösung für $t \in [t_0, t_0 + \tilde{\alpha}]$ bewiesen. Ähnlich zeigt man die Aussage für $t \in [t_0 - \tilde{\alpha}, t_0]$. $\square$

BEISPIEL 4.4. Sowohl die Differenzialgleichung

$$y'(t) = \sqrt{y(t)}$$

als auch

$$y'(t) = (y(t))^2$$

erfüllen die Voraussetzungen des Existenzsatzes von Peano. $\square$

ANMERKUNG 4.5. Wir haben gesehen, dass der Satz von Peano (anders als der Satz von Picard–Lindelöf) nicht unmittelbar auf einem Fixpunktargument beruht. Grund hierfür ist, dass die Annahmen des Satzes von Peano nicht ausreichen, um den Fixpunktsatz von Banach anzuwenden. Es gibt allerdings weitere Fixpunktsätze, und insbesondere einer davon – der *Schaudersche Fixpunktsatz*, welche 1930 von Schauder bewiesen wurde und 1935 von Tichonov wesentlich verallgemeinert wurde – könnte wohl im Beweis des Satzes von Peano eingesetzt werden. Der Schaudersche Fixpunktsatz (in einem Spezialfall der Tichonovscher Version) besagt nämlich

> Jede stetige Funktion die eine nichtleeren kompakten und konvexen Menge eines metrischen Raumes in sich selbst abbildet bestitzt einen Fixpunkt.

Verschiedene Beweise dieses Satzes sind bekannt, alle sind aber weder einfach noch konstruktiv – d.h., sie liefern die Existenz eines Fixpunktes, verraten aber nicht, wie er aussehen könnte. Diesbezüglich wäre also eine Anwendung des Schauderschen Fixpunktsatzes nicht effektiver als die des Satzes von Ascoli–Arzelà.

ANMERKUNG 4.6. Man kann den Satz von Peano verwenden, um einen alternativen Beweis des Satzes von Picard–Lindelöf herzuleiten. Denn unter den Voraussetzungen des Satzes von Picard–Lindelöf ist f insbesondere stetig und somit ist die Existenz einer Lösung des Cauchy-Problems vom Satz von Peano gewährleistet. Dass diese wiederum eindeutig bestimmt ist, sobald f in der zweiten Variablen Lipschitz-stetig ist, folgt unmittelbar aus dem Gronwallschen Lemma, wie man aus dem Beweis des Satzes 3.33 ableiten kann.

KAPITEL 5

Differenzialgleichungen höherer Ordnung, homogene Systeme und die Wronski-Determinante

BEISPIEL 5.1. Freier Fall eines Körpers nach den Gesetzen von Isaac Newton (1687): „Die Änderung der Bewegung einer Masse ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.“ Ist also $z(t)$ die Höhe eines fallenden Körpers der Masse m zur Zeit t (mit $z(0) = 0$), so gilt

$$m\frac{d^2z}{dt^2}(t) + \rho\frac{dz}{dt}(t) = mg,$$

wobei ρ der Luftwiderstandskoeffizient ist. Man beachte, dass der Term mg weder von z noch von t abhängt. □

BEISPIEL 5.2. Ein harmonischer Oszillator ist ein physikalisches System, bei dem in jedem Punkt eine Kraft anliegt, die in Richtung eines festen Punktes (des "Ruhepunktes") zeigt. Ist also $z(t)$ die Höhe eines Körpers der Masse m zur Zeit t (mit $z(0) = 0$), so gilt

$$m\frac{d^2z}{dt^2}(t) + kz(t) = 0,$$

wobei k eine Federkonstante ist. □

BEISPIEL 5.3. Fall eines Körpers, der von einer Feder gebremst wird (wie beim Bungee-Jumping). Ist also $z(t)$ die Höhe eines fallenden Körpers der Masse m zur Zeit t (mit $z(0) = 0$), so gilt

$$m\frac{d^2z}{dt^2}(t) + \rho\frac{dz}{dt}(t) + kz(t) = mg,$$

wobei ρ der Luftwiderstandskoeffizient und k eine Federkonstante ist. □

Jede (möglicherweise inhomogene) lineare Differenzialgleichung n-ter Ordnung, etwa

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t) \tag{5.1}$$

mit $f, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} : (a, b) \to \mathbb{R}$, lässt sich folgendermaßen auf eine Gleichung 1. Ordnung reduzieren. Man führt neue künstliche Unbekannte der Form

$$u_k(t) := y^{(k)}(t), \qquad 0 \le k \le n.$$

ein – dabei gilt die Konvention, dass $y^{(0)}(t) := y(t)$.

Dann gilt offensichtlich $u'_k(t) = u_{k+1}(t)$, und somit kann man die Gleichung folgendermaßen umformulieren:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_0(t) \\ u_1(t) \\ \vdots \\ u_{n-2}(t) \\ u_{n-1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0(t) \\ u_1(t) \\ \vdots \\ u_{n-2}(t) \\ u_{n-1}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix},$$

oder kompakter

$$\mathbf{u}'(t) = A(t)\mathbf{u}(t) + F(t)\ , \tag{5.2}$$

wobei

$$\mathbf{u}(t) := \begin{pmatrix} u_0(t) \\ u_1(t) \\ \dots \\ u_{n-2}(t) \\ u_{n-1}(t) \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

sowie

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

und

$$F(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Es handelt sich also um eine *vektorwertige* Differenzialgleichung 1. Ordnung. Eine solche Gleichung nennt man üblicherweise ein **System von** n **Differenzialgleichungen** (**autonom** falls $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ konstant sind, **nichtautonom** sonst). Ihre Lösungen werden formal durch die Variation der Konstanten gegeben: Jedes $C \in \mathbb{R}^n$ liefert durch

$$\mathbf{u}(t) = e^{tA}\left(\int_0^t e^{-sA}F(s)ds + C\right)$$

eine Lösung des Problems, wobei e^{tA} das Exponential der Matrix tA ist.

ANMERKUNG 5.4. Bestehen die Einträge der Matrix $t \mapsto A(t)$ so wie der Funktion $t \mapsto F(t)$ aus stetigen Funktionen, so ist (ähnlich wie im Beispiel 3.39) $(t, x) \mapsto A(t)x + F(t)$ eine vektorwertige, stetige, in der zweiten Variabel Lipschitz-stetige Funktion und der Satz von Picard–Lindelöf liefert die Existenz einer eindeutigen Lösung jedes mit der Differenzialgleichung

$$\mathbf{u}'(t) = A(t)\mathbf{u}(t) + F(t) \tag{5.5}$$

assoziierten Cauchy-Problems.

Legt man jedoch keine Anfangsbedingungen fest, so existieren mehrere Lösungen. Ist die Differenzialgleichung linear, so ist nach Definition jede lineare Kombination von Lösungen selber eine Lösung und somit bilden die Lösungen einen Vektorraum. Eine Differenzialgleichung n-ter Ordnung benötigt genau n Anfangsbedingungen, damit die Lösung eindeutig bestimmt werden kann: Deshalb ist der Vektorraum der Lösungen n-dimensional.

5.1. Systeme homogener Gleichungen

Wir wollen uns besonders mit dem Cauchy-Problem zur homogenen Version des Systems (5.12) befassen, also mit

$$\text{(CP)} \qquad \mathbf{u}'(t) = A(t)\mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 \ ,$$

wobei $A \in C(I, \mathbb{R}^n)$ ($I \subset \mathbb{R}$ ist dabei ein Intervall) und $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^n$. Dementsprechend ist die Unbekannte $\mathbf{u}$ eine $\mathbb{R}^n$-wertige Funktion in einer reellen Variablen.

Aufgrund der Linearität des Problems ist jede lineare Kombination von Lösungen selbst wieder eine Lösung: Man spricht oft vom *Superpositionsprinzip*. Angesichts dessen bildet die Menge der Lösungen von (CP) einen Vektorraum. Deshalb ist es erstrebenswert, eine Basis dieses Vektorraumes zu finden, denn dies würde uns erlauben, *alle* weiteren Lösungen durch eine Linearkombination der Basis ausdrücken zu können.

Wir fangen damit an, die Anfangsbedingung $\mathbf{u}_0$ als lineare Kombination

$$\mathbf{u}_0 := \sum_{k=1}^{n} \mathbf{u}_{0k} e_k$$

(mittels der Koeffizienten $\mathbf{u}_{01}, \dots, \mathbf{u}_{0n} \in \mathbb{R}$) der Vektoren der kanonischen Basis $e_1, \dots, e_n$ auszudrücken: Diese sind die Vektoren, deren Einträge durch das *Kronecker-Delta* gegeben sind, also

$$e_{j_k} := \delta_{jk}, \qquad \delta_{jk} := \begin{cases} 1 & \text{falls j=k ,} \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Nun kann zu jedem $k \in \{1, \dots, n\}$ auch $\mathbf{u}_{0k} e_k$ als Anfangswert angesehen werden. Somit gibt es für jedes k genau eine Lösung des Cauchy-Problems

$$(\text{CP}_k) \qquad \mathbf{v}'(t) = A(t)\mathbf{v}(t), \qquad \mathbf{v}(t_0) = e_k \ ,$$

etwa $\mathbf{v}^k : I \to \mathbb{R}^n$. Das Superpositionsprinzip liefert nun, dass

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{u}_{0k} \mathbf{v}^k(t) \ .$$

Das Interessante daran ist, dass man beim Betrachten einer anderen Anfangsbedingung nicht das neue Cauchy-Problem von vorn lösen muss: Stattdessen drückt man die neue Anfangsbedingung – etwa $\tilde{\mathbf{u}}_0$ – als lineare Kombination der Basisvektoren $e_1, \dots, e_n$ aus, also

$$\tilde{\mathbf{u}}_0 = C\mathbf{u}_0$$

und dann kann man die Lösung zum neuen Cauchy-Problem durch

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) = C\mathbf{u}(t)$$

angeben.

Wir möchten diese Idee verallgemeinern, denn es ist nicht immer einfach, genau $(\mathrm{CP}_1, \ldots, \mathrm{CP}_\mathrm{n})$ zu lösen. Stattdessen nehmen wir an, dass wir eine Familie von n Lösungen $\tilde{\mathbf{u}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{u}}_n$ von (CP) kennen. Nun möchten wir herausfinden, ob sich wieder jede Lösung eines weiteren Anfangswertproblems als Linearkombination von $\tilde{\mathbf{u}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{u}}_n$ darstellen lässt, d.h., ob diese Funktionen linear unabhängig sind. Dabei heißen Funktionen $f_1, \ldots f_m$ *linear abhängig*, wenn $C_1, \ldots C_m \in \mathbb{R}$ existieren mit mindestens einem $C_i \neq 0$, so dass

$$C_1 f_1 + \ldots + C_m f_m \equiv 0 \, .$$

(Insbesondere müssen die Werte der Funktionen an jeder Stelle linear abhängig sein.) Sonst heißen sie *linear unabhängig*.

DEFINITION 5.5. *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $A \in C(I; M_n(\mathbb{R}))$. Jede Basis $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n$ des Vektorraumes der Lösungen der vektorwertigen Gleichung*

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}(t) = A(t)\mathbf{u}(t)$$

heißt Fundamentalsystem *dieser Gleichung.*

BEISPIEL 5.6. Die Konstruktion am Anfang dieses Abschnitts zeigt, dass die vektorwertige lineare homogene Gleichung

$$\mathbf{u}'(t) = A(t)\mathbf{u}(t)$$

immer ein Fundamentalsystem besitzt.

BEISPIEL 5.7. Die Gleichung

$$\frac{d^2u}{dt^2}(t) + \frac{g}{\ell}u(t) = 0$$

beschreibt die Schwingungen eines idealen Pendels (ohne Reibung, gesamte Masse in einem Punkt konzentriert, kleine Auslenkung), wobei ℓ die Länge des Pendels, g die Beschleunigung unter der Schwerkraft, und die Unbekannte u die Auslenkung darstellen. Dann bilden die beiden Funktionen

$$t \mapsto \cos\sqrt{\frac{g}{\ell}}t \quad \text{und} \quad t \mapsto \sin\sqrt{\frac{g}{\ell}}t$$

ein Fundamentalsystem der Gleichung

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}(t),$$

welche die Pendelgleichung 2. Ordnung zu einem System zweier Differenzialgleichungen 1. Ordnung reduziert.

DEFINITION 5.8. *Es seien ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und Funktionen $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n : I \to R^n$ gegeben. Dann bezeichnen wir mit der* Wronski-Determinante an der Stelle $t \in I$ *von* $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n$ *die Determinante $W(t) := \det V(t)$ der matrixwertige Abbildung $V : I \to M_n(\mathbb{R})$, so dass der $i - j$-Eintrag von $V(t)$ der i-te Eintrag von $\mathbf{v}^j(t)$ ist.*

Anders formuliert: die j-te Spalte von $V(t)$ ist $\mathbf{v}^j(t)$. Sind die Funktionen $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n$ linear unabhängige Lösungen von

$$\mathbf{u}'(t) = A(t)\mathbf{u}(t) \, ,$$

so heißt manchmal $V(t)$ *Fundamentalmatrix* dieser Gleichung.

Die Wronski-Determinante hat ihren Namen von Józef Maria Hoene-Wroński, welcher 1812 einen Vorläufer dieser Determinante in einem Essay zuerst entwickelte; entgegen der analytischen Arbeiten von Joseph-Louis Lagrange (vgl. `http://www.impan.pl/~pragacz/download/hwa.pdf`).

LEMMA 5.9. *Es seien n Lösungen $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^n$ von*

$$\mathbf{u}'(t) = A(t)\mathbf{u}(t)$$

gegeben. Verschwindet die Wronski-Determinante an keiner Stelle, so sind die Funktionen $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^n$ linear unabhängig.

BEWEIS. Sind $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^n$ linear abhängig, so gibt es Konstanten $C_1, \dots, C_n$ mit $(C_1, \dots, C_n) \neq (0, \dots, 0)$, sodass

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \mathbf{u}^k(t) = 0 \qquad \text{für alle } t \in I \ .$$

Diese Gleichung stellt für jedes t ein System

$$V(t)C \equiv \sum_{k=1}^{n} \mathbf{u}_i^k(t) C_k = 0 \ , \qquad i = 1, \dots, n, \quad t \in I \ ,$$

von n algebraischen Gleichungen in den n Unbekannten $C_1, \dots, C_n$ dar (um dies zu veranschaulichen, kann man dieses System als vektorielle Gleichung

$$V(t)z = 0$$

umschreiben, wobei $z := (C_1, \dots, C_n)$ und $V = (V_{ik}(t)) := (\mathbf{u}_i^k(t))$ die Fundamentalmatrix an der Stelle t sind). Dieses System hat nach Voraussetzung eine Lösung $(C_1, \dots, C_n) \neq 0$ (bzw. $z \neq 0$), deshalb muss die Determinante der assoziierten Matrix 0 sein (denn sonst wäre die Matrix $V(t)$ der Koeffizienten invertierbar). Diese Determinante ist gerade die Wronski-Determinante. □

BEISPIEL 5.10. Giuesppe Peano beobachtete um 1890, dass die Umkehrung der Implikation (2) im Lemma 5.12 nicht gilt. Es seien z.B.

$$f(t) := t^2 \qquad \text{und} \qquad g(t) := t|t| \ .$$

Dann liefert eine direkte Berechnung, dass ihre Wronski-Determinante im Intervall $[-1, 1]$ identisch verschwindet, ohne dass f, g linear abhängig sind: Denn z.B. sind C_1, C_2 Konstanten mit

$$C_1 f + C_2 g = 0 \ ,$$

so gilt insbesondere (durch Auswertung an den Stellen $t = 1, t = -1$)

$$C_1 + C_2 = 0 = C_1 - C_2$$

welche nur vom Paar $(C_1, C_2) = (0, 0)$ gelöst wird.

Fast immer werden wir den Begriff der Wronski-Determinante in einem sehr speziellen Fall betrachten: Nämlich im Fall einer matrixwertigen Abbildung $A \in C(I; M_n(\mathbb{R}))$ und von n Lösungen $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n$ von

$$\mathbf{u}'(t) = A(t)\mathbf{u}(t), \quad t \in I \ .$$

Besonders interessant ist der Fall einer Differenzialgleichungen (5.1). In diesem Fall entspricht laut (5.3) jedes $\mathbf{v}^j$ einem Vektor, der von einer Lösung y_j von (5.1) zusammen mit ihren ersten $n-1$ Ableitungen gebildet wird. Somit bezeichnet man kanonisch als Wronski-Determinante der (skalarwertigen!) Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ die Determinante der (Fundamental)matrix

$$V(t) := \begin{pmatrix} y_1(t) & \ldots & y_n(t) \\ y_1'(t) & & y_n'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Wir betrachten vorerst den Fall einer Differenzialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{d^2u}{dt^2}(t) + p(t)\frac{du}{dt}(t) + q(t)u(t) = 0 \; .$$

Wir wissen schon, dass man diese Gleichung äquivalent als System

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}(t) = A(t)\mathbf{u}(t)$$

schreiben kann, wobei

$$\mathbf{u}(t) := \begin{pmatrix} u(t) \\ \frac{du}{dt}(t) \end{pmatrix}$$

und

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{pmatrix} \; :$$

offensichtlich ist genau dann $A \in C(I; M_2(\mathbb{R}))$, wenn $p, q \in C(I)$. Der Vektorraum der Lösungen dieser Gleichung ist 2-dimensional. Es seien u, v Lösungen: Dann ist ihre Wronski-Determinante

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} u(t) & v(t) \\ \frac{du}{dt}(t) & \frac{dv}{dt}(t) \end{pmatrix} = u(t)\frac{dv}{dt}(t) - v(t)\frac{du}{dt}(t) \; .$$

Durch Ableiten bekommen wir

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt}(t) &= u(t)\frac{d^2v}{dt^2}(t) - v(t)\frac{d^2u}{dt^2}(t) \\ &\quad + \frac{du}{dt}(t)\frac{dv}{dt}(t) - \frac{dv}{dt}(t)\frac{du}{dt}(t) \\ &= u(t)\frac{d^2v}{dt^2}(t) - v(t)\frac{d^2u}{dt^2}(t) \\ &= u(t)\left(-p(t)\frac{dv}{dt}(t) - q(t)v(t)\right) - v(t)\left(-p(t)\frac{du}{dt}(t) - q(t)u(t)\right) \\ &= -p(t)u(t)\frac{dv}{dt}(t) + p(t)\frac{du}{dt}(t)v(t) \\ &= -p(t)W(t) \end{aligned}$$

d.h. W ist eine Lösung der linearen, homogenen Differenzialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{dW}{dt}(t) = -p(t)W(t), \qquad t \in I \; ,$$

und somit gilt notwendigerweise

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(s)ds\right), \qquad t \in I , \tag{5.6}$$

für jedes $t_0 \in I$. Dabei ist besonders zu beachten, dass diese Wronski-Determinante nur durch den Term $W(t_0)$ von den Lösungen u, v abhängt (und zwar nur von den Werten von u, v, u', v' an der Stelle t_0!), sonst nur von $-p$.

Diese Beobachtung geht auf Niels Erik Abel (1827) zurück, wir wollen diese nun verallgemeinern.

BEISPIEL 5.11. Wir wollen nun zeigen, wie man aus der Kenntnis einer speziellen Lösung mithilfe der Wronski-Determinante weitere Lösungen zusammenbasteln kann. Man betrachte z.B. die Gleichung

$$y''(t) = 2(1 + \tan^2 t)y . \tag{5.7}$$

Man weiß, dass die Ableitung von $\tan$ gerade

$$\frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = 1 + \tan^2$$

beträgt. Folglich gilt

$$\frac{d^2 \tan}{dt^2} = 2\tan(1 + \tan^2)$$

und somit ist $y^1 := \tan$ eine Lösung der Differenzialgleichung (5.7). So weit so gut. Wir wollen jetzt sehen, wie man eine weitere Lösung im Bereich, in welchem $\tan t \neq 0$ finden kann, d.h. für $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$. Ist y eine weitere Lösung, so muss angesichts der obigen Abelschen Formel die Wronski-Determinante von y^1, y

$$W(t) = y^1 y' - {y^1}' y = C$$

für eine Konstante C erfüllen (hier ist nämlich $p \equiv 0$). Somit erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{y^1}\right) = \frac{y^1 y' - {y^1}' y}{(y^1)^2} = \frac{W}{(y^1)^2} = \frac{C}{\tan^2} ,$$

wobei $(y^1)^2$ das Quadrat von $y^1 = \tan$ bezeichnet. Daher gilt notwendigerweise

$$y(t) = C \tan t \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\tan^2 s} ds ,$$

oder äquivalent (warum? Es ist lehrreich, diese Rechnung durchzuführen)

$$y(t) = C_1(t \tan t + 1) + C_2 \tan t . \tag{5.8}$$

Die Lösung $y^1 = \tan$ erhält man, indem man $C_1 = 0$ und $C_2 = 1$ setzt; für $C_2 = 0$ und $C_1 = 1$ findet man allerdings die (von y^1 linear unabhängige – warum?) Lösung $y^2 := \mathrm{id} \cdot \tan + 1$. Man hat somit ein Fundamentalsystem aus Lösungen von (5.7) gefunden und deshalb werden *alle* Lösungen durch (5.8) gegeben.

SATZ 5.12. *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A \in C(I; M_n(\mathbb{R}))$ und $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^n$ Lösungen von*

$$\mathbf{u}'(t) = A(t)\mathbf{u}(t), \qquad t \in I\,, \tag{5.9}$$

gegeben. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(1) *Die Wronski-Determinante W von $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^n$ erfüllt für beliebige $t_0 \in I$ die sogenannte* Liouville-Gleichung

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{Spur}(A(s))ds \right) .$$

(2) *Die Wronski-Determinante ist entweder identisch positiv, identisch negativ oder verschwindet identisch. Insbesondere verschwindet sie entweder an jeder oder an keiner Stelle $t \in I$.*

Im Folgenden bezeichnen wir mit

$$\big(a_1 | \dots | a_n\big) \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} b_1 \\ \hline \vdots \\ \hline b_n \end{pmatrix}$$

die $n \times n$ Matrix, deren k-te Spalte mit dem Vektor $a_k \in \mathbb{R}^n$, bzw. deren k-te Zeile mit dem Vektor $b_k \in \mathbb{R}^n$ übereinstimmt. Etwa ist die Wronski-Determinante der Funktionen $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^n$ an der Stelle t die Determinante der Matrix

$$V(t) \equiv \big(\mathbf{u}^1(t) | \dots | \mathbf{u}^n(t)\big) .$$

BEWEIS VON SATZ 5.12. (1) Um die Aussage zu beweisen reicht es zu zeigen, dass die Wronski-Determinante die Differenzialgleichung

$$\frac{dW}{dt}(t) = \mathrm{Spur} A(t) W(t), \qquad t \in I\,,$$

erfüllt.

Da $\mathbf{u}^k$ für alle $k = 1, \dots, n$ eine Lösung von (5.9) ist, ist

$$\frac{d\mathbf{u}^k_j}{dt}(t) = \sum_{\ell=1}^{n} A_{j\ell}(t)\mathbf{u}^k_\ell, \qquad k = 1, \dots, n\,.$$

Folglich ist

$$\mathbf{r}_j := \begin{pmatrix} \mathbf{u}^1_j & \dots & \mathbf{u}^n_j \end{pmatrix}$$

eine (Zeilen)vektorwertige Funktion, welche die (vektorwertige) Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_j}{dt}(t) &\equiv \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \mathbf{u}^1_j & \dots & \mathbf{u}^n_j \end{pmatrix}(t) \\ &\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \sum_{\ell=1}^n A_{j\ell}(t)\mathbf{u}^1_\ell & \dots & \sum_{\ell=1}^n A_{j\ell}(t)\mathbf{u}^n_\ell \end{pmatrix}(t) \\ &\equiv \sum_{\ell=1}^{n} A_{j\ell}(t) \begin{pmatrix} \mathbf{u}^1_\ell & \dots & \mathbf{u}^n_\ell \end{pmatrix}(t) = \sum_{\ell=1}^{n} A_{j\ell}(t)\mathbf{r}_\ell(t) \end{aligned}$$

erfüllt. Aufgrund der Multilinearität der Determinante und der Produktregel gilt

$$\frac{dW}{dt}(t) = \det\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1'(t) \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{r}_n(t) \end{pmatrix} + \ldots + \det\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(t) \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{r}_n'(t) \end{pmatrix} . \tag{5.10}$$

und, wieder aufgrund der Multilinearität der Determinante,

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1'(t) \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{r}_n(t) \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} \sum_{\ell=1}^n A_{1\ell}(t)\mathbf{r}_\ell(t) \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{r}_n(t) \end{pmatrix} \\ &= A_{11}(t)\det\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(t) \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{r}_n(t) \end{pmatrix} + \sum_{\ell\neq 1}^n A_{1\ell}(t)\det\begin{pmatrix} \mathbf{r}_\ell(t) \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{r}_n(t) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Beachte nun, dass im letzten Term die rechte Summe verschwindet, da sie aus Summanden besteht, die jeweils verschwinden – jeder ist nämlich die Determinante einer Matrix in welcher zwei Zeilen übereinstimmen. Wendet man die selbe Argumentation auf jeden Summanden in (5.10) an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt}(t) &= A_{11}(t)\det\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(t) \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{r}_n(t) \end{pmatrix} + \ldots + A_{nn}(t)\det\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(t) \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{r}_n(t) \end{pmatrix} \\ &= (A_{11} + \ldots + A_{nn})(t)\det\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(t) \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{r}_n(t) \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{Spur} A(t)W(t) , \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

(2) Berücksichtigt man, dass die Exponentialfunktion stets positive Werte annimmt, so ist die Aussage eine unmittelbare Folgerung der Liouville-Gleichung. □

KOROLLAR 5.13. *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A \in C(I; M_n(\mathbb{R}))$ und $\mathbf{u}^1, \ldots, \mathbf{u}^n$ Lösungen von*

$$\mathbf{u}'(t) = A(t)\mathbf{u}(t), \qquad t \in I , \tag{5.11}$$

gegeben. Verschwindet die Wronski-Determinante dieser Lösungen an einer Stelle nicht, so sind die Lösungen von (5.11) *durch*

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^n C_k \mathbf{u}^k$$

für beliebige n-Tupel $(C_1, \ldots, C_n) \in \mathbb{R}^n$ gegeben.

BEISPIEL 5.14. Betrachtet man für $f \equiv 0$ die homogene Version der Differenzialgleichung n-ter Ordnung (5.1), so muss man die Matrixwertige Funktion A wie in (5.4) betrachten. Dabei gilt

$$\mathrm{Spur} A(t) = -a_{n-1}(t) \ :$$

Dies zeigt, dass die Abelsche Formel (5.6) tatsächlich ein Spezialfall der Liouville-Gleichung ist.

ÜBUNGSAUFGABE 5.15. Führe einen vollständigen Beweis der Formel (5.10) durch.

Angesichts von Lemma 5.9 und vor allem von (Gegen)beispiel 5.10 ist die folgende Beobachtung besonders relevant. Sie zeigt, dass die Umkehrung vom Lemma 5.9 eben nicht für beliebige n-Tupel von Funktionen gilt, wohl aber für Lösungen eines Systems von Differenzialgleichungen.

LEMMA 5.16. *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A \in C(I; M_n(\mathbb{R}))$. Sind $\mathbf{u}^1, \dots \mathbf{u}^n$ linear unabhängige Lösungen von*

$$\mathbf{u}'(t) = A(t)\mathbf{u}(t), \qquad t \in I \, ,$$

so verschwindet ihre Wronski-Determinante nirgendwo.

BEWEIS. Würde die Wronski-Determinante an irgendeiner Stelle t_0 verschwinden, so gäbe es eine nichttriviale Lösung $(C_1, \dots, C_n)$ von

$$V(t_0)C \equiv \sum_{k=1}^{n} \mathbf{u}_i^k(t_0)C_k = 0 \, , \qquad i = 1, \dots, n \, .$$

Betrachten wir nun die Funktion

$$\mathbf{u} := \sum_{k=1}^{n} C_k \mathbf{u}^k \, .$$

Dann würde diese Funktion $\mathbf{u}$ das Cauchy-Problem

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}(t) = A(t)\mathbf{v}(t), \quad t \in I \, , \qquad \mathbf{v}(t_0) = 0 \, ,$$

lösen. Da auch die Funktion $\tilde{\mathbf{u}} :\equiv 0$ eine Lösung dieses Problems, und angesichts der Eindeutigkeit der Lösung (Satz von Picard–Lindelöf!) muss $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} \equiv 0$ sein, was der linearen Unabhängigkeit der Lösungen $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^n$ widerspricht. □

5.2. Systeme inhomogener Gleichungen

Zum Abschluss dieses Kapitels möchten wir sehen, wie die Theorie der Wronski-Determinante auch behilflich sein kann, wenn man inhomogene Gleichungen wie (5.12) untersuchen möchte. Ähnlich wie im Abschnitt 2.2 wollen wir einen Ansatz machen, der im Nachhinein seine Berechtigung finden wird. Es sei nämlich $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^n\}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Gleichung

$$\mathbf{u}'(t) = A(t)\mathbf{u}(t) \, , \tag{5.12}$$

so nehmen wir an, dass wir eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\mathbf{u}'(t) = A(t)\mathbf{u}(t) + F(t) \, , \tag{5.13}$$

als

$$\mathbf{u}(t) = V(t)C(t) \equiv \sum_{k=1}^{n} C_k(t)\mathbf{u}^k(t) \tag{5.14}$$

darstellen können, wobei $V(t)$ wie üblich die Fundamentalmatrix an der Stelle t bezeichnet. Beachte, dass die Gleichung

$$V'(t) = A(t)V(t) \tag{5.15}$$

spaltenweise gilt, als unmittelbare Folgerung von (5.12).

SATZ 5.17. *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, t_0 ein Häufungspunkt von I, $A \in C(I; M_n(\mathbb{R}))$ und $F \in C(I; \mathbb{R}^n)$ stetige Funktionen, welche in den Häufungspunkten von I Grenzwert haben. Sind $\mathbf{u}^1, \dots \mathbf{u}^n$ linear unabhängige Lösungen von*

$$\mathbf{u}'(t) = A(t)\mathbf{u}(t), \qquad t \in I ,$$

so sind die Lösungen der Differenzialgleichung

$$\mathbf{u}'(t) = A(t)\mathbf{u}(t) + F(t), \quad t \in I , \tag{5.16}$$

von der Form

$$\mathbf{u}(t) = V(t) \left(C_0 + \int_{t_0}^{t} V(s)^{-1} F(s)\, ds \right), \qquad t \in I , \tag{5.17}$$

für beliebige $C_0 \in \mathbb{R}^n$, wobei $V(t)$ die Fundamentalmatrix der homogenen Gleichung ist.

Insbesondere ist die einzige Lösung des Cauchy-Problems

$$\mathbf{u}'(t) = A(t)\mathbf{u}(t) + F(t), \quad t \in I, \qquad \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 ,$$

durch

$$\mathbf{u}(t) = V(t) \left(\mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^{t} V(s)^{-1} F(s)\, ds \right), \qquad t \in I , \tag{5.18}$$

gegeben.

Dabei ist $t \mapsto V(t)C_0$ die allgemeine Lösung der assoziierten homogenen Gleichung, während $t \mapsto V(t)\int_{t_0}^{t} V(s)^{-1}F(s)\, ds$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung darstellt.

BEWEIS. Leitet man (5.14) ab, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt}(t) =& V'(t)C(t) + V(t)C'(t) \\ &= A(t)V(t)C(t) + V(t)C'(t) \\ &= A(t)\mathbf{u}(t) + V(t)C'(t) . \end{aligned}$$

Damit ist

$$V(t)C'(t) = F(t)$$

eine notwendige Bedingung dafür, dass $\mathbf{u}$ eine Lösung von (5.13) ist. Äquivalent gilt, da die Wronski-Determinante nirgendwo verschwindet und somit $V(t)$ nicht singulär ist,

$$\frac{dC}{dt}(t) = V(t)^{-1}F(t) .$$

Integrieren wir zwischen t_0 und t so gilt

$$C(t) = \mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^{t} V(s)^{-1}F(s)\, ds.$$

Durch Einsetzen in (5.14) ergibt sich die Aussage. □

Man kann sich leicht vergewissern, dass dieser Beweis genau dem Beweis vom Satz 2.17 entspricht.

BEISPIEL 5.18. Wir wenden den Satz 5.17 an der inhomogenen Differenzialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2u}{dt^2}(t)+p(t)\frac{du}{dt}(t)+q(t)u(t)=r(t) \tag{5.19}$$

an. Es seien y^1, y^2 linear unabhängige Lösungen von

$$\frac{d^2u}{dt^2}(t)+p(t)\frac{du}{dt}(t)+q(t)u(t)=0\ .$$

Dann bilden sie eine Fundamentalmatrix

$$V(t)=\begin{pmatrix} y^1(t) & y^2(t)\\ {y^1}'(t) & {y^2}'(t)\end{pmatrix}\ :$$

Da y^1, y^2 linear unabhängig sind, ist ihre Wronski-Determinante $W(t)$ laut Lemma 5.16 nirgends Null und somit ist $V(t)$ nicht singulär: Man kann $V(t)$ also invertieren und die Inverse ist bekanntlich durch

$$V^{-1}(t)=\frac{1}{W(t)}\begin{pmatrix} {y^2}'(t) & -y^2(t)\\ -{y^1}'(t) & y^1(t)\end{pmatrix}$$

gegeben. Schreibt man (5.19) in ein System (5.4) um, so muss man die vektorwertige Funktion

$$F(t):=\begin{pmatrix} 0\\ r(t)\end{pmatrix}$$

einführen. Deshalb gilt

$$V^{-1}(s)F(s)=\frac{1}{W(s)}\begin{pmatrix} -y^2(s)r(s)\\ y^1(s)r(s)\end{pmatrix}\ .$$

und eine spezielle Lösung von (5.4) ist gegeben durch

$$I\ni t\mapsto V(t)\int_{t_0}^{t} V^{-1}(s)F(s)\in\mathbb{R}^n.$$

Für die Gleichung (5.19) ist nur die erste Koordinate dieser vektorwertigen Funktion relevant. Eine direkte Rechnung zeigt, dass diese

$$t\mapsto y^1(t)\int_{t_0}^{t}\frac{-y^2(s)r(s)}{W(s)}ds+y^2(t)\int_{t_0}^{t}\frac{y^1(s)r(s)}{W(s)}ds \tag{5.20}$$

lautet.

BEISPIEL 5.19. Wir wenden die Formel, die wir im Beispiel 5.18 gefunden haben, im Fall der Gleichung

$$y''+4y=\frac{1}{\cos(2t)}$$

an.

Zwei Lösungen der assoziierten homogenen Gleichung sind offensichtlich

$$y^1: t\mapsto\cos(2t)\qquad\text{und}\qquad y^2: t\mapsto\sin(2t)\ .$$

Ihre Wronski-Determinante ist identisch 2, und somit bilden $\{y^1, y^2\}$ ein Fundamentalsystem. Die allgemeine Lösung der obigen Differenzialgleichung ist dann durch

$$y(t)=\tilde{y}(t)+y^1(t)+y^2(t)$$

gegeben, wobei laut (5.20)

$$\begin{aligned}\tilde{y}(t) &= -\cos(2t)\int_{t_0}^{t}\frac{\sin(2s)}{2\cos(2s)}ds + \sin(2t)\int_{t_0}^{t}\frac{\cos(2s)}{2\cos(2s)}ds \\ &= \frac{\cos(2t)\ \log|\cos(2t)|}{4} + \frac{\sin(2t)t}{2}\end{aligned}$$

gilt.

Literaturverzeichnis

[1] Herbert Amann, Joachim Escher, *Analysis II*, Birkhäuser, Basel, 2006.

[2] Vladimir I. Arnold, *Ordinary Differential Equations*, MIT Press, Cambridge (MA), 1978.

[3] Alexander Grigorian, *Ordinary Differential Equation*, Vorlesungsskript der Universität Bielefeld, 2008.

[4] Harro Heuser, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Viewerg+Teubner, Wiesbaden, 2009.

[5] Morris Tenenbaum, Harry Pollard, *Ordinary Differential Equations*, Dover, Mineola (NY), 1985.

KAPITEL 6

Übungen

ulm university universität
uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Jun.-Prof. PD Dr. Delio Mugnolo
delio.mugnolo@uni-ulm.de

Dr. Arthur Gerber
arthur.gerber@uni-ulm.de

Übungen - Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Abgabe: bis 08.05.2014, 12:15 Uhr in H3

(30 Punkte entsprechen 100%)

1. *(Matrixexponential)* Sei $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann ist das Exponential der Matrix A definiert durch die Potenzreihe
$$exp(A) := e^X := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \ .$$
Zeige:
   (a) Ist B invertierbar, so gilt $e^{BAB^{-1}} = Be^A B^{-1}$.
   (b) Ist $AB = BA$, so gilt $e^{A+B} = e^A e^B$.
   (c) Ist A idempotent, so gilt $e^{tA} = I + A(e^t - 1)$ mit $t \in \mathbb{C}$ und I bezeichnet die Einheitsmatrix.

(6 Punkte)

2. *(Ableitung einer Matrix)* Sei $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit
Funktionen $a_{ij} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i, j = 1, \dots, n)$.
Die Ableitung $\frac{d}{dt}A(t) := A'(t)$ der Matrix A ist komponentenweise definiert.
Zeige:
   (a) Das Produkt zweier differenzierbarer Matrizen $A(t), B(t)$ ist differenzierbar und es gilt
$$\frac{d}{dt}\left(A(t)B(t)\right) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t) \ .$$
   (b) Ist $A(t)$ invertierbar, so ist auch die Inverse $A^{-1}(t)$ differenzierbar und es gilt
$$\frac{d}{dt}A^{-1}(t) = -A^{-1}(t)A'(t)A^{-1}(t) \ .$$

(4 Punkte)

3. Bestimme die Lösung der folgenden Cauchy-Probleme:

   (a) $y'(t) + y(t)\tan(t) = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}; \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

   (b) $y'(t) + y(t)\tan(t) = \cos(t), \quad y(0) = \frac{\pi}{2}; \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

   (c) $y'(t) + \frac{2y(t)}{1-t^2} = 1 - t, \quad y(0) = \frac{1}{2}; \quad t \in (-1, 1)$

(8 Punkte)

4. *(Kondensator)* Ein Kondensator mit Kapazität $C > 0$ und ein Widerstand $R > 0$ werden hintereinander geschaltet und eine zeitabhängige Spannung $U(t)$ angelegt. Für den fließenden Strom $I(t)$ gilt dann die Differentialgleichung

$$RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = U'(t) \ .$$

   Bestimme die Lösung dieser DGL mit Anfangswert $I(0) = I_0 > 0$

   (a) für den Gleichspannungsfall $U(t) \equiv U_0, \quad U_0 > 0.$

   (b) für die angelegte Wechselspannung $U(t) = U_0 \sin(\omega t), \quad U_0 > 0, \omega > 0.$

   Wie verhält sich jeweils die Lösung für $t \to \infty$?

(8 Punkte)

5. Löse folgende Cauchy-Probleme:

   (a) $y'(t) = e^{y(t)} \sin(t), \quad y(0) = 0$

   (b) $y'(t) = e^t y(t), \quad y(0) = 1$

(6 Punkte)

ulm university universität uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Jun.-Prof. PD Dr. Delio Mugnolo
delio.mugnolo@uni-ulm.de

Dr. Arthur Gerber
arthur.gerber@uni-ulm.de

Lösungsvorschläge - Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Aufgaben 1 - 5

1. *(Matrixexponential)* Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann ist das Exponential der Matrix A definiert durch die Potenzreihe

$$exp(A) := e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \, .$$

Zeige:

(a) Ist B invertierbar, so gilt $e^{BAB^{-1}} = Be^A B^{-1}$.

(b) Ist $AB = BA$, so gilt $e^{A+B} = e^A e^B$.

(c) Ist A idempotent, so gilt $e^{tA} = I + A(e^t - 1)$ mit $t \in \mathbb{R}$ und I bezeichnet die Einheitsmatrix.

(8 Punkte)

Lösung:

(a) Es gilt

$$(BAB^{-1})^k = (BAB^{-1})(BAB^{-1})\dots(BAB^{-1}) = BA^k B^{-1}$$

und damit

$$e^{BAB^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(BAB^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} BA^k B^{-1} = Be^A B^{-1} \, .$$

(b) Die Cauchyproduktformel

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

für absolut konvergente Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zusammen mit der Voraussetzung $AB = BA$ (es gilt also der binomische Lehrsatz) angewand auf das Matrixexponential ergibt:

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{1}{(n-k)!} A^k B^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(A+B)^n = e^{A+B} \end{aligned}$$

(c) Es gilt $A^2 = A$ (Def. von idempotent) und somit auch $A^k = A$ für $k = 2, 3, \dots$. Damit folgt

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tA)^k \\ &= (tA)^0 + tA + \frac{1}{2}(tA)^2 + \frac{1}{3!}(tA)^3 + \dots \\ &= I + tA + \frac{t^2}{2}A + \frac{t^3}{3!}A + \dots \\ &= I + A(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \dots) \\ &= I + A(e^t - 1) \end{aligned}$$

2. *(Ableitung einer Matrix)* Sei $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

   Funktionen $a_{ij} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i, j = 1, \dots, n)$.

   Die Ableitung $\frac{d}{dt}A(t) := A'(t)$ der Matrix A ist komponentenweise definiert.

   Zeige:

   (a) Das Produkt zweier differenzierbarer Matrizen $A(t), B(t)$ ist differenzierbar und es gilt

   $$\frac{d}{dt}\left(A(t)B(t)\right) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t) \ .$$

   (b) Ist $A(t)$ invertierbar, so ist auch die Inverse $A^{-1}(t)$ differenzierbar und es gilt

   $$\frac{d}{dt}A^{-1}(t) = -A^{-1}(t)A'(t)A^{-1}(t) \ .$$

   (c) Für $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist e^{Ct} $(t \in \mathbb{R})$ differenzierbar und es gilt

   $$\frac{d}{dt}e^{Ct} = Ce^{Ct} \ .$$

   (8 Punkte)

Lösung:

(a) Die Einträge $c_{ik}(t)$ $(i, k = 1, \dots, n)$ der Matrix $C(t) := A(t)B(t)$ ergeben sich aus der Definition des Matrixprodukts

$$c_{ik}(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) \cdot b_{jk}(t) \ .$$

Mit der Produktregel folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}c_{ik}(t) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(a_{ij}(t) \cdot b_{jk}(t)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(a'_{ij}(t)b_{jk}(t) + a_{ij}(t)b'_{jk}(t)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(a'_{ij}(t)b_{jk}(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij}(t)b'_{jk}(t)\right) \ . \end{aligned}$$

(b) $A^{-1}(t) = \dfrac{1}{\det A(t)}\,\overline{A(t)}$, wobei $\overline{A(t)}$ die Adjunkte von $A(t)$ bezeichnet.

Diese ist offensichtlich differenzierbar und somit auch $A^{-1}(t)$. Mit Aufgabenteil (a) gilt:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}\left(A^{-1}(t)A(t)\right) &= (A^{-1})'(t)A(t) + (A^{-1})(t)A'(t) \\ \Leftrightarrow\quad (A^{-1})'(t)A(t) &= -(A^{-1})(t)A'(t) \\ \Leftrightarrow\quad (A^{-1})'(t) &= -(A^{-1})(t)A'(t)A^{-1}(t) \end{aligned}$$

(c) e^{Ct} ist differenzierbar nach (a). Seien $c_{ij}^{(k)}$ die Einträge der Matrix C^k. Dann sind die Einträge in e^{Ct} durch die absolut konvergenten Potenzreihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} c_{ij}^{(k)} t^k$ gegeben. Diese sind gliedweise differenzierbar mit

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} c_{ij}^{(k)} t^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} c_{ij}^{(k)} t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} c_{ij}^{(k+1)} t^k \ .$$

Damit gilt also

$$\frac{d}{dt} e^{Ct} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} C^{k+1} t^k = C e^{Ct} \ .$$

3. Bestimme die Lösung der folgenden Cauchy-Probleme:

(a) $y'(t) + y(t)\tan(t) = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}; \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(b) $y'(t) + y(t)\tan(t) = \cos(t), \quad y(0) = \frac{\pi}{2}; \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(c) $y'(t) + \dfrac{2y(t)}{1-t^2} = 1 - t, \quad y(0) = \frac{1}{2}; \quad t \in (-1, 1)$

(8 Punkte)

Lösung:

(a) Die Differenzialgleichung ist linear homogen. Entsprechend den Notationen aus der Vorlesung stellen wir die DGL um:

$$y'(t) = -\tan t\; y(t) \ .$$

Mit $p(t) = -\tan t$ liefert Satz 2.6. die globale Lösung

$$y(t) = \frac{\pi}{2}\exp\left(\int_0^t -\tan s\; ds\right) = \frac{\pi}{2}\exp\left(\log(\cos t)\right) = \frac{\pi}{2}\cos t \ .$$

(b) Entsprechend der Schreibweise/Notationen aus der Vorlesung stellen wir die DGL um:

$$y'(t) = -y(t)\tan(t) + \cos(t)$$

Es handelt sich um eine lineare inhomogene Gleichung mit $p(t) = -\tan t$ und $q(t) = \cos t$. Mit Satz 2.16 ist die einzige Lösung gegeben durch

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\int_a^t p(s)ds}\left(\int_a^t e^{-\int_a^s p(r)dr}\; q(s)\; ds + y_0\right) \\ &= \cos t\left(\int_0^t \frac{1}{\cos s}\cos s\; ds + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \ . \end{aligned}$$

(c) $y'(t) = -\dfrac{2y(t)}{1-t^2} + (1-t)$ ist eine lineare inhomogene Gleichung mit $p(t) = -\dfrac{2}{1-t^2}$ und $q(t) = 1-t$. Die allgemeine Lösung ist wieder durch Satz 2.16 gegeben:

$$\begin{aligned}
y(t) &= e^{\int_a^t p(s)ds}\left(\int_a^t e^{-\int_a^s p(r)dr}\, q(s)\, ds + y_0\right) \\
&= e^{\int_0^t -\frac{2}{1-s^2}ds}\left(\int_0^t e^{-\int_a^s -\frac{2}{1-r^2}dr}\,(1-s)\, ds + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1-t}{1+t}\left(\int_0^t \frac{1+s}{1-s}(1-s)\, ds + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1-t}{1+t}\left(\frac{t^2}{2} + t + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1-t}{1+t}\left(t^2+2t+1\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1-t}{1+t}(1+t)^2 = \frac{1}{2}\left(1-t^2\right)
\end{aligned}$$

Dabei wurde folgende Nebenrechnung zu $\displaystyle\int_0^t \frac{2}{1-s^2}ds$ verwendet:

Partialbruchzerlegung von $\dfrac{2}{1-s^2}$ liefert:

$$\frac{2}{1-s^2} = \frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s}$$

bzw.

$$\int_0^t \frac{2}{1-s^2}ds = \int_0^t \frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s}ds = \log(1+s) - \log(1-s) = \log\frac{1+s}{1-s}$$

4. *(Kondensator)* Ein Kondensator mit Kapazität $C > 0$ und ein Widerstand $R > 0$ werden hintereinander geschaltet und eine zeitabhängige Spannung $U(t)$ angelegt. Für den fließenden Strom $I(t)$ gilt dann die Differentialgleichung

$$RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = U'(t)\,.$$

Bestimme die Lösung dieser DGL mit Anfangswert $I(0) = I_0 > 0$

(a) für den Gleichspannungsfall $U(t) \equiv U_0, \quad U_0 > 0$.

(b) für die angelegte Wechselspannung $U(t) = U_0\sin(\omega t), \quad U_0 > 0, \omega > 0$.

Wie verhält sich jeweils die Lösung für $t \to \infty$?

(8 Punkte)

Lösung:

(a) Im Gleichspannungsfall mit $U'(t) = 0$ lautet die Gleichung

$$I'(t) = -\frac{1}{RC}I(t)\,.$$

Satz 2.6 liefert die globale Lösung

$$I(t) = I_0 e^{\int_0^t -\frac{1}{RC}ds} = I_0 e^{-\frac{1}{RC}t}\,.$$

$I(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

(b) Im Wechspannungsfall gilt $U'(t) = U_0\omega\cos(\omega t)$ und die Gleichung lautet

$$I'(t) = -\frac{1}{RC}I(t) + \frac{U_0\omega\cos(\omega t)}{R}.$$

Mit Satz 2.16 und $p(t) = -\frac{1}{RC}$, $q(t) = \frac{U_0\omega\cos(\omega t)}{R}$ folgt

$$\begin{aligned}
I(t) &= e^{\int_a^t p(s)ds}\left(\int_a^t e^{-\int_a^s p(r)dr}\ q(s)\ ds + I_0\right)\\
&= e^{\int_0^t -\frac{1}{RC}ds}\left(\int_0^t e^{-\int_0^s -\frac{1}{RC}dr}\ \frac{U_0\omega\cos(\omega s)}{R}\ ds + I_0\right)\\
&= e^{-\frac{1}{RC}t}\left(\int_0^t e^{\frac{1}{RC}s}\ \frac{U_0\omega\cos(\omega s)}{R}\ ds + I_0\right)\\
&= e^{-\frac{1}{RC}t}\left(\frac{U_0\omega}{R}\int_0^t e^{\frac{1}{RC}s}\ \cos(\omega s)\ ds + I_0\right)\\
&= e^{-\frac{1}{RC}t}\left(\frac{U_0\omega}{R}\left[e^{\frac{1}{RC}t}\left(\frac{RC}{1+(RC\omega)^2}\cos(\omega t) + \frac{(RC)^2\omega}{1+(RC\omega)^2}\sin(\omega t)\right) - \frac{RC}{1+(RC\omega)^2} + I_0\right]\right)\\
&= \left(I_0 - \frac{U_0\omega C}{1+(RC\omega)^2}\right)e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{U_0\omega C}{1+(RC\omega)^2}\big(\cos(\omega t) + RC\omega\sin(\omega t)\big)
\end{aligned}$$

$I(t)$ ist divergent für $t \to \infty$.

5. Löse folgende Cauchy-Probleme:

   (a) $y'(t) = e^{y(t)}\sin(t), \quad y(0) = 0$

   (b) $y'(t) = e^t y(t), \quad y(0) = 1$

(6 Punkte)

Lösung:

(a) Hierbei handelt es sich um eine nicht lineare DGL. Wir sortieren in der Gleichung die $y-$Terme auf eine Seite und die $t-$Terme auf die andere Seite.

$$\begin{aligned}
& y'(t) = \frac{dy}{dt} = e^y \sin t\\
\Leftrightarrow\ & e^{-y}dy = \sin t\, dt\\
\Rightarrow\ & \int e^{-y}\,dy = \int \sin t\, dt\\
\Rightarrow\ & -e^{-y} = -\cos t + c \quad (c \in \mathbb{R})\\
\Rightarrow\ & -y = \log(\cos t - c)\\
\Rightarrow\ & y = -\log(\cos t - c)
\end{aligned}$$

Wir bestimmen noch die Konstante c mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

$$0 = y(0) = -\log(1-c) \quad \Longrightarrow \quad c = 0$$

Also ist $y(t) = -\log(\cos t)$ die einzige Lösung des AWPs.

(b) Wir gehen analog wie in Teil (a) vor.

$$
\begin{aligned}
& y'(t) = \frac{dy}{dt} = e^t y \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{y} dy = e^t \, dt \\
\Rightarrow \quad & \int \frac{1}{y} \, dy = \int e^t \, dt \\
\Rightarrow \quad & \log |y| = e^t + c \quad (c \in \mathbb{R}) \\
\Rightarrow \quad & |y| = e^{e^t + c} \\
\Rightarrow \quad & y = \pm e^{e^t + c}
\end{aligned}
$$

Einsetzen der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ in die positive Lösung liefert:

$$1 = e^{1+c} \quad \Longrightarrow \quad c = -1$$

Einsetzen in die negative Lösung führt zum Widerspruch $-1 = e^{1+c}$.
Also ist $y(t) = e^{e^t - 1}$ die einzige Lösung des AWPs.

ulm university universität uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Jun.-Prof. PD Dr. Delio Mugnolo
delio.mugnolo@uni-ulm.de

Dr. Arthur Gerber
arthur.gerber@uni-ulm.de

Übungen - Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Abgabe: bis 15.05.2014, 12:15 Uhr in H3

(30 Punkte entsprechen 100%)

6. (a) Löse die folgende Bernoulli-Differenzialgleichung:

$$y'(t) = y^4(t)\cos(t) + y(t)\tan(t), \qquad y(0) = \frac{1}{2}$$

   (b) Löse die folgende Riccati-Differenzialgleichung:

$$y'(t) = 2t - \frac{y(t)}{t} + \frac{y^2(t)}{t^3}, \qquad t > 0$$

   (Hinweis: Die spezielle Lösung lässt sich leicht erraten.)

   (c) Löse folgendes Anfangswertproblem höherer Ordnung:

$$(1+t^2)y''(t) = 1 - 2ty'(t), \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

   (Hinweis: Führe eine geeignete Substitution durch.)

(4+4+4 Punkte)

7. Seien f, g lokal Lipschitz-stetige Funktionen. Zeige:
   (a) Das Produkt $f \cdot g$ ist lokal Lipschitz-stetig.
   (b) Die Verkettung $f \circ g$ ist lokal Lipschitz-stetig.

   Bestimme auch jeweils eine zugehörige Lipschitz-Konstante.

(6 Punkte)

8. Untersuche, ob die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf dem gegebenen Rechteck in der zweiten Variablen global Lipschitz-stetig sind.
   (a) $f(t,x) = \sqrt[3]{x}$ auf $[0,1) \times (x_0 - s, x_0 + s),\ 0 < s < x_0$
   (b) $f(t,x) = \sqrt[3]{x}$ auf $[0,1) \times [0,s),\ s > 0$

(6 Punkte)

9. Zeige, dass das Anfangswertproblem

$$y'(t) = y(t)e^{t^2-16}\cos(t^5+4)\ , \quad y(1) = 1$$

   auf dem Intervall $[-2, 4]$ genau eine Lösung besitzt.

(6 Punkte)

ulm university universität ulm

Fakultät für Mathematik und
Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Jun.-Prof. PD Dr. Delio Mugnolo
delio.mugnolo@uni-ulm.de

Dr. Arthur Gerber
arthur.gerber@uni-ulm.de

Lösungsvorschläge - Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Aufgaben 6-9

6. (a) Löse die folgende Bernoulli-Differenzialgleichung:

$$y'(t) = y^4(t)\cos(t) + y(t)\tan(t), \qquad y(0) = \frac{1}{2}$$

(b) Löse die folgende Riccati-Differenzialgleichung:

$$y'(t) = 2t - \frac{y(t)}{t} + \frac{y^2(t)}{t^3}, \qquad t > 0$$

(Hinweis: Die spezielle Lösung lässt sich leicht erraten.)

(c) Löse folgendes Anfangswertproblem höherer Ordnung:

$$(1+t^2)y''(t) = 1 - 2ty'(t), \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

(Hinweis: Führe eine geeignete Substitution durch.)

(4+4+4 Punkte)

Lösung:

(a) Mit den Notationen aus der Vorlesung (Satz 3.3) gilt $p(t) = \tan t$, $q(t) = \cos t$ und $m = 4$. Die Lösung ist von der Form

$$y(t) = \frac{e^{\int_a^t p(s)\,ds}}{\left(-\int_a^t e^{(m-1)\int_a^s p(r)\,dr}(m-1)q(s)\,ds + C\right)^{\frac{1}{m-1}}}.$$

Es gilt:

$$\int \tan t\,dt = \int \frac{\sin t}{\cos t}\,dt = -\log(\cos t)$$

Der Anfangswert $y(0) = 1$ liefert uns als maximales Lösungsintervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$$\int e^{3(-\log(\cos t))} 3\cos t\,dt = \int e^{\log(\cos t)^{-3}} 3\cos t\,dt = \int 3(\cos t)^{-2}\,dt = 3\tan t$$

Alles in die Lösungsformel eingesetzt liefert:

$$y(t) = \frac{e^{-\log(\cos t)}}{(-3\tan t + C)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{(-3\cos^2 t\sin t + C\cos^3 t)^{\frac{1}{3}}}$$

Wir bestimmen mit dem Anfangwert noch die Konstante $C \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2} = y(0) = \frac{1}{(C-0)^{\frac{1}{3}}} \quad \Rightarrow \quad C = 8$$

Somit lautet für $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ die eindeutige Lösung:

$$y(t) = \frac{1}{(-3\cos^2 t \sin t + 8\cos^3 t)^{\frac{1}{3}}}$$

(b) Mit den Notationen aus der Vorlesung (Satz 3.10) gilt $f_0(t) = 2t$, $f_1(t) = -\frac{1}{t}$ und $f_2(t) = \frac{1}{t^3}$ und die Lösung ist gegeben durch

$$y(t) = \tilde{y}(t) + \frac{e^{\int_a^t f_1(s)+2f_2(s)\tilde{y}(s)\,ds}}{C - \int_a^t e^{\int_a^s f_1(r)+2f_2(r)\tilde{y}(r)\,dr} f_2(s)\,ds}$$

wobei $\tilde{y}$ eine spezielle (noch zu erratende) Lösung ist. Man sieht leicht, dass $\tilde{y}(t) = t^2$ die DGL erfüllt. Mit den Nebenrechnungen

$$\int -\frac{1}{t} + 2\frac{1}{t^3}t^2\,dt = \log t\ ,$$

$$\int e^{\log t}\frac{1}{t^3}\,dt = -\frac{1}{t}$$

setzen wir die allgemeine Lösung für $t > 0$ und $C \in \mathbb{R}$ zusammen:

$$y(t) = t^2 + \frac{e^{\log t}}{C + \frac{1}{t}} = t^2 + \frac{t^2}{Ct+1}$$

(c) Hierbei handelt es sich zunächst um eine DGL 2. Ordnung. Dafür kennen wir (noch) kein Vorgehen zum Auffinden einer Lösung. Die Substitution $z(t) = y'(t)$ führt die gegeben DGL in eine lineare DGL 1. Ordnung über:

$$(1+t^2)z'(t) = 1 - 2tz(t)$$

oder

$$z'(t) = -\frac{2t}{1+t^2}z(t) + \frac{1}{1+t^2}$$

Mit den Notationen $p(t) = -\frac{2t}{1+t^2}$ und $q(t) = \frac{1}{1+t^2}$ liefert Satz 2.17 die eindeutige Lösung

$$z(t) = e^{\int_a^t p(s)ds}\left(\int_a^t e^{-\int_a^s p(r)dr}\ q(s)\ ds + z_0\right)\ .$$

Dabei ist $z_0 = z(0) = y'(0) = 0$. Damit folgt:

$$z(t) = \frac{t}{1+t^2}$$

Weiter gilt:

$$y(t) = \int z(t)\,dt = \int \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\log(1+t^2) + \tilde{C}$$

Mit $0 = y(0)$ folgt $\tilde{C} = 0$. Damit ist die eindeutige Lösung des ursprünglichen AWPs gegeben durch

$$y(t) = \frac{1}{2}\log(1+t^2)\ .$$

7. Seien f, g lokal Lipschitz-stetige Funktionen. Zeige:

   (a) Das Produkt $f \cdot g$ ist lokal Lipschitz-stetig.

   (b) Die Verkettung $f \circ g$ ist lokal Lipschitz-stetig.

   Bestimme auch jeweils eine zugehörige Lipschitz-Konstante.

   (6 Punkte)

   Lösung: Wir betrachten die Funktionen f, g nur in normierten Räumen.

   (a) Sei f auf der offenen Umgebung U_1 Lipschitz-stetig mit Konstante $L > 0$ und g auf der offenen Umgebung U_2 Lipschitz-stetig mit Konstante $N > 0$. Sei weiter $\tilde{U} := U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Dann sind f und g auf $\tilde{U}$ Lipschitz-stetig. Weiter gibt es eine kompakte Teilmenge $U \subset \tilde{U}$: Auf dieser sind f und g weiter Lipschitz-stetig und auf U existiert das Maximum $M_f$von f bzw. M_g von g . Für $x_1, x_2 \in U$ gilt dann:

   $$\begin{aligned} \|(f \cdot g)(x_2) - (f \cdot g)(x_1)\| &= \|f(x_2)g(x_2) - f(x_1)g(x_2) + f(x_1)g(x_2) - f(x_1)g(x_1)\| \\ &= \|g(x_2)(f(x_2) - f(x_1)) + f(x_1)(g(x_2) - g(x_1))\| \\ &\leq \|g(x_2)\|\|(f(x_2) - f(x_1))\| + \|f(x_1)\|\|(g(x_2) - g(x_1))\| \\ &\leq (M_g L + M_f N)\|x_2 - x_1\| \end{aligned}$$

   Die erste Ungleichung stammt von der Dreiecksungleichung, die zweite nutzt die Beschränktheit und Lipschitz-stetigkeit von f, g aus. $M_g L + M_f N$ ist eine Lipschitzkonstante von $f \cdot g$.

   (b) Seien $f : C \to B$ und $g : A \to C$ Lipschitz-stetig mit $KonstantenL, N > 0$. Betrachte $f \circ g : A \to B$ mit $x_1, x_2 \in A$:

   $$\|(f \circ g)(x_2) - (f \circ g)(x_1)\| = \|f(g(x_2)) - f(g(x_1))\| \leq L\|g(x_2) - g(x_1)\| \leq LN\|x_2 - x_1\|$$

   Die erste Ungleichung nutzt die Lipschitz-stetigkeit von f auf $C = g(A)$ und die zweite die Liptschitz-stetigkeit von g auf A. LN ist eine Lipschitzkonstante von $f \circ g$.

8. Untersuche, ob die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf dem gegebenen Rechteck in der zweiten Variablen global Lipschitz-stetig sind.

   (a) $f(t, x) = \sqrt[3]{x} \quad \text{auf} \quad [0, 1) \times (x_0 - s, x_0 + s),\ 0 < s < x_0$

   (b) $f(t, x) = \sqrt[3]{x} \quad \text{auf} \quad [0, 1) \times [0, s),\ s > 0$

   (6 Punkte)

   Lösung: Wir nutzen Lemma 3.18 aus der Vorlesung: f ist genau dann global Lipschitz-stetig, wenn $f_x = \frac{\partial}{\partial x} f$ beschränkt ist.

   (a) $|f_x(t, x)| \leq \sup_{x \in (x_0 - s, x_0 + s)} |f_x(t, x)| = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x_0 - s)^2}} = C < \infty$. Also ist f global Lipschitz-stetig in der zweiten Variablen.

   (b) $f_x(t, x) \to \infty$ für $x \to 0$. Also ist die Ableitung nicht beschränkt und somit f nicht global Lipschitz-stetig.

9. Zeige, dass das Anfangswertproblem

$$y'(t) = y(t)e^{t^2-16}\cos(t^5+4)\ , \quad y(1) = 1$$

auf dem Intervall $[-2, 4]$ genau eine Lösung besitzt.

(6 Punkte)

Lösung:

Betrachte $f(t, y) = ye^{t^2-16}\cos(t^5+4)$. f ist auf $[-2, 4] \times \mathbb{R}$ stetig als Komposition stetiger Funktionen. Weiter ist f in der zweiten Variablen Lipschitz-stetig, denn es gilt für $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$:

$$|f(t, y_2) - f(t, y_1)| = |e^{t^2-16}||\cos(t^5+4)||y_2 - y_1| \leq 1 \cdot 1 \cdot |y_2 - y_1|$$

Damit gibt es mit dem Satz von Picard-Lindelöf (3.27) eine eindeutig bestimmte Lösung

$$y : [1-\alpha, 1+\alpha] \to \mathbb{R}$$

des gegebenen AWPs.
(Welchen Wert α genau hat, lässt sich mit dem Satz nicht beantworten! Eine globale Version garantiert jedoch die eindeutige Lösung auf dem gegebenen Intervall $[-2, 4]$.)

ulm university universität uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Jun.-Prof. PD Dr. Delio Mugnolo
delio.mugnolo@uni-ulm.de

Dr. Arthur Gerber
arthur.gerber@uni-ulm.de

Übungen - Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Abgabe: bis 22.5.2014, 12:15 Uhr in H3

(30 Punkte entsprechen 100%)

10. *(Fixpunktsatz von Weissinger)* Seien X ein vollständiger, metrischer Raum, $\emptyset \neq M \subset X$ abgeschlossen, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ eine konvergente Reihe mit $\alpha_n > 0$ und $T : M \to M$ eine Abbildung mit

$$d(T^n x, T^n y) \leq \alpha_n d(x, y) \quad \forall x, y \in M \;\; \forall n \in \mathbb{N} .$$

   (a) Zeige: T hat genau einen Fixpunkt ξ. Der Fixpunkt ist der Grenzwert der Iterationsfolge $(T^n x_0)_{n \in \mathbb{N}}$ mit beliebigem Startwert $x_0 \in M$.
   (Hinweis: Zeige zunächst, dass die Folge $x_n := T^n x_0$ eine Cauchyfolge ist.)

   (b) Beweise die Fehlerabschätzung

$$d(\xi, x_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k d(x_1, x_0) .$$

   (Hinweis: Verwende eine Abschätzung aus (a) und betrachte einen geeigneten Limes.)

   (c) Zeige mit Teil (a) den Satz von Banach. (Satz 3.24 aus der Vorlesung)

(12 Punkte)

11. *(Wachstumsgleichungen)* Betrachte die Differenzialgleichung

$$y'(t) = \alpha y(t) - \beta (y(t))^{1-\gamma}$$

mit $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ und $\gamma \in \mathbb{R}$. Diese beschreibt z.B. für $\beta = 0$ das exponentielle Wachstum (Bsp. 1.4 aus der Vorlesung) und für $\beta > 0, \gamma = -1$ das logistische Wachstum (Bsp. 1.5 aus der Vorlesung).

   (a) Löse die Differenzialgleichung zum Anfangswert $y(0) = 1$ und gib das zugehörige Lösungsintervall an.

   (b) Skizziere jeweils den Graphen der Lösung für $\gamma = -1$.

(Hinweis: Fallunterscheidung in Abhängigkeit der Parameter!)

(10 Punkte)

12. *(Iterationsverfahren zum Lösen von Differenzialgleichungen)* Das Cauchyproblem $y'(t) = f(t, y(t)), \; y(t_0) = y_0$ besitze auf dem Intervall I die eindeutige Lösung $y(t)$. Diese ist durch den Grenzwert der iterierten Folge

$$y_n(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s)) \, ds \quad n \in \mathbb{N}, \; t \in I$$

gegeben. (Das zeigt der Satz von Picard-Lindelöf.)

(a) Bestimme die Lösung des Cauchyproblems $y'(t) = y(t), \; y(0) = 1$ als Grenzwert der Folge $((y_n(t)))_{n\in\mathbb{N}}$ mit Startwert $y_0(t) \equiv 1$.

(b) Zeichne die Iterationen $y_1(t), \dots, y_4(t)$ und die exakte Lösung $y(t)$ in ein gemeinsames Schaubild für $t \in [-2, 1]$.
(Hinweis: Die Graphen dürfen mit maple/matlab etc. gezeichnet werden.)

(6 Punkte)

13. *(Regularität von Lösungen)* Sei $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differenzialgleichung $y'(t) = f(t, y(t))$, wobei $f : (a, b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar ist.
Zeige: Die Lösung y ist auch beliebig oft differenzierbar.

(4 Punkte)

Lösungsvorschläge zu Aufgaben 10-13

10. (a) Setze $x_n := T^n x_0$. Beh 1: (x_n) ist Cauchyfolge

Bew: $d(x_{n+1}, x_n) = d(T^{n+1}x_0, T^n x_0) = d(T^n(Tx_0), T^n x_0)$

$= d(T^n x_1, T^n x_0) \overset{\text{Vor.}}{\leq} \alpha_n d(x_1, x_0) \quad (*)$

Sei $k \in \mathbb{N}$: $d(x_{n+k}, x_n) \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + d(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) + \ldots +$
$+ d(x_{n+1}, x_n) = \sum_{j=n}^{n+k-1} d(x_{j+1}, x_j) \overset{(*)}{\leq} \sum_{j=n}^{n+k-1} a_j d(x_1, x_0) \xrightarrow{n,k\to\infty} 0$

$\left(\sum_{j=n}^{n+k-1} a_j \overset{a_j > 0}{\leq} \sum_{j=n}^{\infty} a_j \underset{n\to\infty}{\to} 0 \right)$

Also ist (x_n) Cauchyfolge $\square$

Beh 2: (x_n) ist konvergent.

Bew: • X vollständig $\Rightarrow x_n \to \xi \in X$

• $x_n \in M \ \forall n \in \mathbb{N}$ und M abgeschlossen $\Rightarrow \xi \in M$ $\square$

Beh 3: ξ ist Fixpunkt von T.

Bew: $0 \leq d(x_{n+1}, T\xi) = d(Tx_n, T\xi) \leq \alpha_1 d(x_n, \xi) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow x_{n+1} \to T\xi \quad$ (also auch $x_n \to T\xi$)

$\overset{\text{Grenzwert}}{\underset{\text{eindeutig}}{\Rightarrow}} T\xi = \xi$ $\square$

Beh 4: Der Fixpunkt ist eindeutig.

Bew: Seien $\xi, \eta \in M$ Fixpunkte.

$$0 \leq d(\xi, \eta) = d(T\xi, T\eta) = \dots = d(T^n \xi, T^n \eta)$$

$$\leq \alpha_n \, d(\xi, \eta) \xrightarrow{n \to \infty} 0 \qquad (\text{da } \alpha_n \to 0)$$

$$\Rightarrow d(\xi, \eta) = 0 \Rightarrow \xi = \eta$$

(b) aus (a) gilt: $\quad d(x_{n+k}, x_n) \leq \sum_{j=n}^{n+k-1} a_j \, d(x_1, x_0)$

$$(k \to \infty) \downarrow$$

$$d(\xi, x_n) \leq \sum_{j=n}^{\infty} a_j \, d(x_1, x_0)$$

(c) Sei T eine strikte Kontraktion, also $d(Tx, Ty) \leq L d(x,y)$ mit $0 < L < 1$

$$\Rightarrow d(T^n x, T^n y) = d(T(T^{n-1}x), T(T^{n-1}y)) \leq L \, d(T^{n-1}x, T^{n-1}y)$$

$$\leq \dots \leq L^n d(x, y)$$

Setze im Satz von Weissinger $\alpha_n := L^n$. Offensichtlich ist $\alpha_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} L^n \overset{\text{geo}}{\underset{\text{Reihe}}{=}} \frac{1}{1-L} - 1 < \infty$

Also ist der Satz von Banach ein Spezialfall vom Satz von Weissinger.

11. $\begin{cases} y'(t) = \alpha y(t) - \beta (y(t))^{1-\gamma} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $(\alpha > 0,\ \beta \geq 0,\ \gamma \in \mathbb{R})$

Fall $\beta = 0$: $y'(t) = \alpha y(t) \Rightarrow y(t) = Ce^{\alpha t}$

$1 = y(0) = Ce^0 = C \Rightarrow$ Lsg: $y(t) = e^{\alpha t}$ mit $t \in \mathbb{R}$

Ab jetzt $\beta > 0$.

Fall $\gamma = 0$: $y' = \alpha y - \beta y = (\alpha - \beta) y \Rightarrow y(t) = Ce^{(\alpha-\beta)t}$

$C = 1 \Rightarrow$ Lsg: $y(t) = e^{(\alpha-\beta)t}$, $t \in \mathbb{R}$

Fall $\gamma \neq 0$: $y' = \alpha y - \beta y^{1-\gamma}$ ist Bernoulli-DGL

Notationen aus Satz 3.3.: $p(t) = \alpha$, $q(t) = -\beta$, $m = 1-\gamma$

NR: $e^{\int \alpha dt} = e^{\alpha t}$,

$\int (e^{(m-1)\int p})(m-1) q = \int e^{-\gamma \alpha t} \cdot (-\gamma)(-\beta) = +\gamma \beta \frac{1}{-\alpha \gamma} e^{-\alpha \gamma t} = -\frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha \gamma t}$

$\Rightarrow y = \dfrac{e^{\alpha t}}{\left(+\frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha\gamma t} + C\right)^{\frac{1}{-\gamma}}} = e^{\alpha t} \left(+\frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha \gamma t} + C\right)^{\frac{1}{\gamma}}$

$1 = y(0) = \left(+\frac{\beta}{\alpha} + C\right)^{\frac{1}{\gamma}} \Rightarrow C = -\frac{\beta}{\alpha} + 1$

$\Rightarrow y = e^{\alpha t}\left(+\frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha\gamma t} + 1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left(\frac{\beta}{\alpha} + \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{\gamma \alpha t}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$

$\underline{\alpha \geq \beta:}$ $y(t) > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$

$\alpha < \beta$: $y(t) > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{\alpha} + \underbrace{\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)}_{\frac{\alpha-\beta}{\alpha} < 0} e^{\alpha\gamma t}\right)^{\frac{1}{\gamma}} > 0 \Leftrightarrow$

$e^{\alpha\gamma t} < -\frac{\beta \alpha}{\alpha(\alpha - \beta)} \Leftrightarrow e^{\alpha \gamma t} < \frac{\beta}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow \alpha\gamma t < \log \frac{\beta}{\beta - \alpha}$

$\overset{\gamma > 0}{\Leftrightarrow} t < \log\left(\frac{\beta}{\beta-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha\gamma}}$

Weiter mit $\alpha < \beta$:

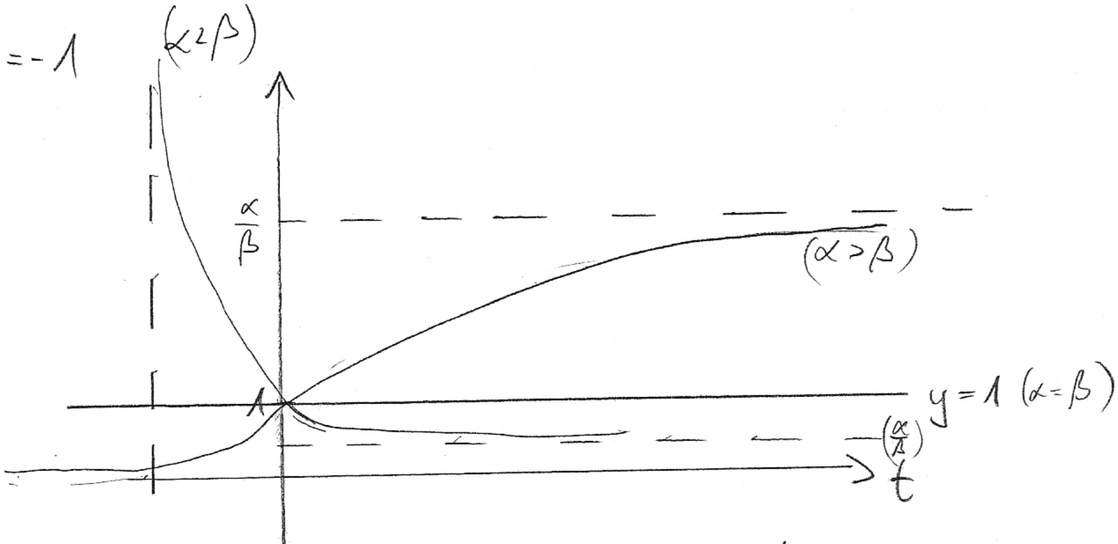
$$y(t) > 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \alpha\gamma t < \log\frac{\beta}{\beta-\alpha} \overset{\gamma<0}{\Leftrightarrow} t > \frac{1}{\alpha\gamma}\log\frac{\beta}{\beta-\alpha} = \log\left(\frac{\beta}{\beta-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha\gamma}}$$

Also insgesamt: (für $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$)

$$y(t) = \left(\left(\frac{\beta}{\alpha} + \left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)\right)e^{\gamma\alpha t}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \text{ für } \begin{cases} t \in \mathbb{R}, & \text{falls } \alpha \geq \beta \\ t < \log\left(\frac{\beta}{\beta-\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma\alpha}}, & \text{falls } \alpha < \beta,\ \gamma > 0 \end{cases}$$

$$y(t) = \qquad t > \underbrace{\log\left(\frac{\beta}{\beta-\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma\alpha}}}_{=:\delta}, \text{ falls } \alpha < \beta,\ \gamma < 0$$

(b) $\gamma = -1$



$$\alpha > \beta: \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha} + \underbrace{\underbrace{\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)}_{<0} e^{-\alpha t}}_{\to 0}\right)^{-1} = \frac{\alpha}{\beta} > 1$$

$$\lim_{t\to-\infty} y(t) = 0$$

$$\alpha < \beta: \lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{\alpha}{\beta} < 1$$

$$\lim_{t\to\delta+} y(t): \left(\underbrace{\frac{\beta}{\alpha} + \underbrace{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}\cdot \underbrace{e^{-\alpha\log\left(\frac{\beta}{\beta-\alpha}\right)^{\frac{1}{-\alpha}}}}_{\to\frac{\beta}{\beta-\alpha}}}_{\to -\frac{\beta}{\alpha}(+)}}_{\to 0(+)}\right)^{-1} \xrightarrow{t\to\delta+} \infty$$

12. $y' = y = f(t,y)$, $y(0)=1$

(a) $y_n = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1})\, ds$

$y_1 = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,y_0)\,ds = 1 + \int_0^t y_0\, ds = 1+t$

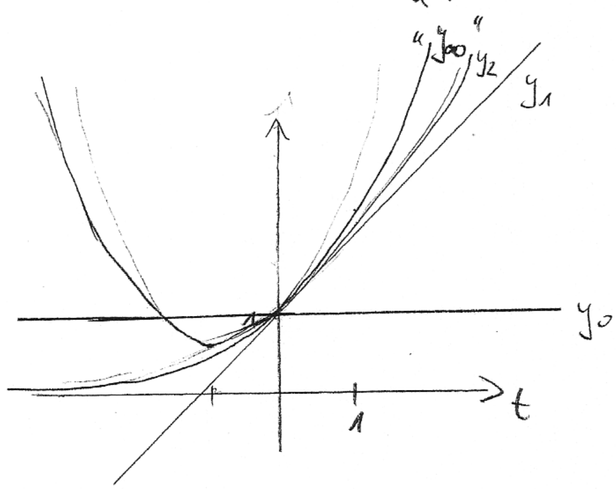
$y_2 = y_0 + \int_0^t y_1\, ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}$, $y_3 = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!}$

Vermutung: $y_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$. Beweis mit Induktion nach n:

$$y_{n+1} = 1 + \int_0^t y_n(s)\,ds \overset{IH}{=} 1 + \int_0^t \sum_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!}\, ds = 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{1}{k+1} t^{k+1} =$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!} t^{k+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{t^k}{k!}$$

(b)



usw.

13. Induktion nach n. IH: Sei $y \in C^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Sei y Lsg von
$y' = f(t,y) \Rightarrow y \in C^n \Rightarrow t \mapsto f(t, y(t)) \in C^n$ als Komposition
von C^n-Fkten $\Rightarrow y' \in C^n \Rightarrow y \in C^{n+1}$

(Ind.start: $n=1$: $y \in C^1 \Rightarrow y' = f \in C^1 \Rightarrow y \in C^2$)

ulm university universität ulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Jun.-Prof. PD Dr. Delio Mugnolo
delio.mugnolo@uni-ulm.de

Dr. Arthur Gerber
arthur.gerber@uni-ulm.de

Übungen - Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Abgabe: **bis Mittwoch, 28.5.2014**, 13:30 Uhr in H3

(25 Punkte entsprechen 100%)

14. *(Satz von Peano)* Wir geben einen alternativen Beweis des Satzes von Peano mit Hilfe des Schauderschen Fixpunktsatzes. Letzterer darf als bekannt/bewiesen vorausgesetzt werden und lautet:
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $\emptyset \neq K \subset X$ abgeschlossen und konvex. Sei weiter die Abbildung $A : K \to K$ stetig und $A(K)$ relativ kompakt. Dann besitzt A einen Fixpunkt.

    Zeige damit den Satz von Peano :
Es sei $f : R \to \mathbb{R}$ stetig mit $R := \{(t, y) : |t - t_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ und $a, b > 0$.
Weiter seien $M := \max\limits_{(t,y)\in R} |f(t, y)|$ und $\alpha := \min\{a, b/M\}$.
Dann gibt es auf $J := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ (mindestens) eine Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0 .$$

    Hinweise zu einer möglichen Vorgehensweise: Mit der Maximumsnorm $\|y\| := \|y\|_{C(J)} := \max\limits_{t\in J} |y(t)|$ wird $C(J)$ zu einem Banachraum. Betrachte die Menge $K := \{y \in C(J) : \|y - y_0\|_{C(J)} \leq b\}$.

    (a) Formuliere das (AWP) als äquivalentes Fixpunktproblem mit einer Abbildung $A : K \to K$. (Betrachte Picard-Operator aus Satz 3.28)
    (b) Zeige, dass es sich bei A um eine stetige Selbstabbildung handelt.
    (c) Zeige: K ist nicht-leer, abgeschlossen und konvex.
    (d) Zeige: $A(K)$ ist relativ kompakt. (Folgende Version des Satzes von Arzela-Ascoli kann als bekannt vorausgesetzt werden: $A(K)$ ist genau dann relativ kompakt in $C(J)$ mit der Supremumsnorm, wenn $A(K)$ gleichgradig stetig und punktweise beschränkt ist.)

    (3+4+3+4 Punkte)

15. Zeige mit Aufgabe 14, dass das (AWP)

$$y'(t) = (t + \sin y(t))^2, \quad y(0) = 3$$

    auf dem Intervall $[-c, c]$ mit $c > 1$ eine Lösung besitzt.

    (5 Punkte)

16. Es sei $f : [c,d] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann hat das (AWP)

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

auf ganz $[c,d]$ eine Lösung mit beliebig gegebenen $t_0 \in [c,d]$ und $y_0 \in \mathbb{R}$.
(Hinweis: Modifiziere den Beweis aus Aufgabe 14.)

(5 Punkte)

17. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, F eine Stammfunktion von f und $y : I \to \mathbb{R}$ Lösung von $y'(t) = f(y(t))$ auf dem offenen Intervall I. Weiter gelte $F(y(t_1)) = F(y(t_2))$ für verschiedene $t_1, t_2 \in I$.
Zeige: y ist konstant auf dem Intervall $[t_1, t_2]$.
(Hinweis: Untersuche das Monotonieverhalten von $F \circ y$.)

(5 Punkte)

Lösungsvorschläge zu Aufgaben 14 - 17

14. (a) Sei y eine Lösung des (AWP) $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$ auf J, d.h. es gilt

$$y'(t) = f(t, y(t)) \text{ für alle } t \in J, \quad y(t_0) = y_0 \qquad (1)$$

$$\overset{f \text{ stetig auf } J}{\Longrightarrow} \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(x, y(x))\,dx \quad \text{für alle } t \in J \qquad (2)$$

Umgekehrt gilt: Erfüllt y die Gleichung (2), so ist y auf J differenzierbar und erfüllt (1) (nach HDI!)

Setze:

$$(Ay)(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(x, y(x))\,dx \quad \text{für jedes } t \in J$$

Damit gilt: y löst (AWP) $\Longleftrightarrow$ y ist Fixpunkt von A

(b) A ist offensichtlich stetig, der Def.bereich von A ist

$$K = \{y \in C(J) : \|y - y_0\|_{C(J)} \leq b\} = \{y \in C(J) : |y(t) - y_0| \leq b \ \forall t \in J\}$$

<u>Beh.</u>: $A : K \to K$

<u>Bew</u>: es ist zu zeigen: $A(K) \subset K$. Sei $y \in K$ (d.h. es gilt $|y(t) - y_0| \leq b \ \forall t \in J$), dann gilt:

$$|(Ay)(t) - y_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(x, y(x))\,dx \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \underbrace{|f(x,y(x))|}_{\underset{\text{Vor.}}{\leq} M}\,dx \right|$$

$$\leq M \left| \int_{t_0}^{t} 1\,dx \right| = M \underbrace{|t - t_0|}_{\leq \alpha \leq \frac{b}{M}} \leq b$$

$\square$

(c) K nicht-leer, da z.B. $y \equiv y_0 \in K$

K abgeschlossen ✓

K konvex, da: Seien $y, z \in K$, $\lambda \in [0,1]$. Dann gilt für $t \in J$:

$$|\lambda y(t) + (1-\lambda) z(t) - y_0| = |\lambda y(t) + (1-\lambda) z(t) - (\lambda y_0 + (1-\lambda) y_0)|$$

$$\leq \lambda \underbrace{|y(t) - y_0|}_{\leq b} + (1-\lambda) \underbrace{|z(t) - y_0|}_{\leq b} \leq \lambda b + (1+\lambda) b = b$$

$\Rightarrow \lambda y + (1-\lambda) z \in K$ ($\Rightarrow K$ konvex nach Def.)

(d) $A(K)$ rel. kompakt $\Leftrightarrow \begin{cases} 1. & A(K) \text{ gleichgradig stetig} \\ 2. & A(K) \text{ punktweise beschränkt} \end{cases}$

zu 2.: $A(K) \subset K$. Wir zeigen K ist beschränkt:

Sei $y \in K \Rightarrow \|y\|_{C(J)} = \max_{t \in J} |y(t)| = \max_{t \in J} |y(t) - y_0 + y_0|$

$$\leq \max_{t \in J} |y(t) - y_0| + |y_0| \leq b + |y_0|$$

zu 1.: Sei $y \in K$, $t_1, t_2 \in J$:

$$\Rightarrow |(Ay)(t_1) - (Ay)(t_2)| = \left| \int_{t_0}^{t_1} f(x, y(x)) dx + \int_{t_0}^{t_2} f(x, y(x)) dx \right|$$

$$= \left| \int_{t_2}^{t_1} f(x, y(x)) dx \right| \leq \left| \int_{t_2}^{t_1} \underbrace{|f(x, y(x))|}_{\leq M} dx \right| \leq \left| \int_{t_2}^{t_1} M \, dx \right|$$

$$= M |t_1 - t_2|$$

Sei $\varepsilon > 0$, wähle dann $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{M}$. Dann gilt:

$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |(Ay)(t_1) - (Ay)(t_2)| \leq M |t_1 - t_2| < M\delta = \varepsilon \quad \forall y \in K$$

Damit ist AK nach Def gleichgradig stetig.

15. $y'(t) = (t + \sin y(t))^2 = f(t, y(t))$, $y(0) = 3$

$J = [-c, c]$, $c > 1$

(Vorüberlegung: $|f(t,y)| = |(t + \sin y)|^2$ ist maximal für $\sin y = 1$ und $t = c$, also $M = (c+1)^2$

$\alpha := \min\{a, \frac{b}{M}\} = \min\{a, \frac{b}{(c+1)^2}\} = c$ falls

$a = c$ und $b = c(c+1)^2$)

Betrachte nun $f : R \to \mathbb{R}$ mit $R := \{(t,y) : |t - 0| \le c, |y - 3| \le c(c+1)^2\}$

f ist stetig auf R und $\alpha = \min\{c, \frac{c}{c(c+1)^2}\} = c$

$\overset{A14}{\underset{\text{Peano}}{\Rightarrow}}$ $\exists$ Lösung $y : [-c, c] \to \mathbb{R}$.

16. Sei $f : [c,d] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt.

Weiter sei $M := \max_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} |f|$. (f stetig fortsetzbar)

Betrachte nun $\tilde{f} : \tilde{R} \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{R} := \{(t,y) : |t - t_0| \le l, |y - y_0| \le l \cdot M\}$

und $l := d - c > 0$ (Intervalllänge von $[c,d]$) und $\tilde{f} = f$ auf $[c,d]$.

Mit $\tilde{M} := \max_{R'} |\tilde{f}|$ gilt $\tilde{M} < M$ und damit

$\alpha := \min\{l, \underbrace{\frac{l \cdot M}{\tilde{M}}}_{> l}\} = l$. Mit A14 hat

das (AWP) $y' = \tilde{f}(t,y)$, $y(t_0) = y_0$ eine Lösung auf

$[t_0 - l, t_0 + l]$. Da $t_0 \in [c,d]$, gilt $[c,d] \subset [t_0 - l, t_0 + l]$

Also hat $y' = \tilde{f}(t,y)$, $y(t_0) = y_0$ insb. eine Lsg auf $[c,d]$.

Auf $[c,d]$ gilt $\tilde{f} = f$.

17. Sei oBdA $t_1 < t_2$ und $t \in [t_1, t_2]$: Dann gilt:

$$\frac{d}{dt}(F\circ y)(t) = \frac{d}{dt} F(y(t)) = \underbrace{f(y(t))}_{=y'(t)} \cdot y'(t) = (y'(t))^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$ $F \circ y$ monoton steigend auf $[t_1, t_2]$.

$F(y(t_1)) = F(y(t_2)) \Rightarrow F\circ y$ konstant auf $[t_1, t_2]$

$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} F(y(t)) = (y'(t))^2 \Rightarrow y'(t) = 0 \Rightarrow y =$ konst.

ulm university universität uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Jun.-Prof. PD Dr. Delio Mugnolo
delio.mugnolo@uni-ulm.de

Dr. Arthur Gerber
arthur.gerber@uni-ulm.de

Übungen - Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Abgabe: bis Donnerstag, 5.6.2014, 12:10 Uhr in H3

(25 Punkte entsprechen 100%)

18. Gegeben seien die folgenden Funktionen auf $\mathbb{R}$:

$$u_1(t) = 1,\ u_2(t) = t^2,\ u_3(t) = (1+t)^2\ ,$$
$$v_1(t) = t^2,\ v_2(t) = t^2+1,\ v_3(t) = 1\ ,$$
$$w_1(t) = t^2,\ w_2(t) = t^2\,\mathrm{sgn}(t)$$

   (a) Bestimme jeweils die Wronski-Determinate von u_1, u_2, u_3 bzw. v_1, v_2, v_3 bzw. w_1, w_2.

   (b) Was lässt sich nur mit Teil (a) über die lineare Unabhängigkeit von $\{u_1, u_2, u_3\}$, $\{v_1, v_2, v_3\}$ bzw. $\{w_1, w_2\}$ aussagen?

   (c) Gib an, welche der Mengen $\{u_1, u_2, u_3\}$, $\{v_1, v_2, v_3\}$ bzw. $\{w_1, w_2\}$ linear abhängig bzw. unabhängig sind.

(5+3+2 Punkte)

19. Seien $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ stetig auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und $n \geq 2$. Weiter seien $u_1, u_2, \ldots u_n : I \to \mathbb{R}$ Lösungen der homogenen Gleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0\ .$$

Die Wronski-Determinante für $t \in I$ lautet:

$$\det V(t) := \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \ldots & u_n(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \ldots & u_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) & u_2^{(n-1)}(t) & \ldots & u_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Zeige:

   (a) Die Ableitung der Determinante einer Matrix $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1,\ldots,n}$ lautet

$$\frac{d}{dt}(\det A(t)) = \det \begin{pmatrix} a_1'(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2'(t) \\ a_3(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \end{pmatrix} + \ldots + \det \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \\ a_n'(t) \end{pmatrix}\ .$$

Dabei ist $a_i = (a_{i1} a_{i2} \dots a_{in})$ die i-te Zeile der Matrix A.

(Hinweis: Nutze die Leibniz-Formel als Definition der Determinante.)

(b) Die Wronski-Determinante erfüllt die Differenzialgleichung

$$\frac{d}{dt}(\det V(t)) + a_{n-1}(t) \det V(t) = 0 \; .$$

(4+8 Punkte)

20. *(inhomogene DGL höherer Ordnung)* Seien $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und $n \geq 2$. Die Funktionen $u_1, u_2, \dots u_n : I \to \mathbb{R}$ seien ein Fundamentalsystem der Lösungen der homogenen Gleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t) y'(t) + a_0(t) y(t) = 0 \; .$$

Weiter genügen die differenzierbaren Funktionen $c_1, \dots c_n : I \to \mathbb{R}$ dem System

$$\begin{pmatrix} u_1(t) & u_2 & \dots & u_n \\ u_1'(t) & u_2' & \dots & u_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) & u_2^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \; .$$

Zeige, dass durch

$$x(t) := \sum_{i=1}^{n} c_i(t) u_i(t)$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t) y'(t) + a_0(t) y(t) = f(t) \; .$$

gegeben ist.

(Hinweis: Schreibe zunächst die Matrixgleichung in Komponenten aus.)

(8 Punkte)

Noch einige Hinweise zur Vorleistung:

- Insgesamt werden 70 Punkte (Blatt 1-5) zum Bestehen der Vorleistung benötigt!
- Meldet euch rechtzeitig (unabhängig davon, ob ihr die benötigten Punkte schon habt) zur Vorleistung an!

Lösungsvorschläge zu Aufgaben 18 - 20

18. (a)

$$W_u(t) = \det \begin{pmatrix} 1 & t^2 & (1+t)^2 \\ 0 & 2t & 2(1+t) \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 4t - 4 - 4t = -4 \; (\neq 0)$$

$$W_v(t) = \det \begin{pmatrix} t^2 & t^2+1 & 1 \\ 2t & 2t & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 4t - 4t = 0$$

$$W_w(t) = \det \begin{pmatrix} t^2 & t^2 \operatorname{sgn} t \\ 2t & 2t \end{pmatrix} = \begin{cases} \overset{t \geq 0}{} \det \begin{pmatrix} t^2 & t^2 \\ 2t & 2t \end{pmatrix} = 0 \\ \underset{t<0}{} \det \begin{pmatrix} t^2 & -t^2 \\ 2t & -2t \end{pmatrix} = 0 \end{cases} = 0 \text{ auf } \mathbb{R}!$$

Nebenrechnung: $w_2(t) = t^2 \operatorname{sgn} t = \begin{cases} t^2, & t \geq 0 \\ -t^2, & t < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow w_2'(t) = \begin{cases} 2t, & t \geq 0 \\ -2t, & t < 0 \end{cases}$, insbesondere ist w_2 auf $\mathbb{R}$ diffbar!

(b) $W_u(t) \neq 0 \overset{\text{Lemma 5.9.}}{\Longrightarrow} u_1, u_2, u_3$ l. unabh.

$W_v(t), W_w(t) = 0$; hier ist ~~keine~~ Aussage möglich!

(c) • $\{u_i\}$ l. u. nach (b)

• Es gilt $v_1 + v_3 = v_2 \Rightarrow \{v_i\}$ l. a.

• Betrachte $C_1 w_1(t) + C_2 w_2(t) = 0 \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Mit } t=1: \; C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 = 0 \\ &\text{Mit } t=-1: \; C_1 \cdot 1 + C_2(-1) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

$\Rightarrow w_1, w_2$ l. u.

19.

$a_{ij} := a_{ij}(t)$

(a) $$\frac{d}{dt} A(t) \overset{\text{Def. nach Leibniz}}{=} \frac{d}{dt}\left(\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma) \cdot a_{1\sigma_1}(t)\, a_{2\sigma_2}(t) \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_n} \right)$$

Produktregel, Vertauschen von Differentialen und Summe (endlich!)

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma)\, a'_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_n} + \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma)\, a_{1\sigma_1} \cdot a'_{2\sigma_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_n} +$$

$$+ \ldots + \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma)\, a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \cdot \ldots \cdot a'_{n\sigma_n}$$

$$\overset{\text{Def. Leibniz}}{=} \det\begin{pmatrix} a'_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \ldots + \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a'_n \end{pmatrix}$$

(am besten sich alles an 2×2 Matrize zuerst klarmachen!)

(b) Sei $u := (u_1\, u_2 \ldots u_n)$ die erste Zeile von $\det V(t)$, also

$\det V(t) = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$\frac{d}{dt}\left(\det V(t)\right) \overset{(a)}{=} \underbrace{\det\begin{pmatrix} u' \\ u' \\ u'' \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix}}_{=0} + \underbrace{\det\begin{pmatrix} u \\ u'' \\ u'' \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix}}_{=0} + \ldots + \underbrace{\det\begin{pmatrix} u \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix}}_{=0} + \det\begin{pmatrix} u \\ u' \\ \vdots \\ u^{(n-2)} \\ u^{(n)} \end{pmatrix}$$

(alle Determinanten haben gleiche Zeile!)

$$= \det\begin{pmatrix} u \\ u' \\ \vdots \\ u^{(n-2)} \\ u^{(n)} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} u \\ u' \\ \vdots \\ u^{(n-2)} \\ -a_{n-1}u^{(n-1)} - a_{n-2}u^{(n-2)} - \ldots - a_1 u' - a_0 u \end{pmatrix}$$

$u^{(n)}$ löst homogene Gleichung aus Angabe!

$$= \det \begin{pmatrix} u \\ u' \\ \vdots \\ u^{(n-2)} \\ -a_{n-1} u^{(n-1)} \end{pmatrix} = -a_{n-1} \underbrace{\det \begin{pmatrix} u \\ u' \\ \vdots \\ u^{(n-2)} \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix}}_{= \det V(t)} = -a_{n-1}(t) \det V(t)$$

Vielfaches der ersten $(n-1)$ Zeilen zur letzten Zeile addieren

20. $$\det V(t) \cdot \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix} \Leftrightarrow (*) \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} c_i' \cdot u_i^{(k)} = 0, & k = 0, \dots, n-2 \\ \sum_{i=1}^{n} c_i' \cdot u_i^{(n-1)} = f \end{cases}$$

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) \cdot u_i(t) \quad (\text{Angabe})$$

$$\Rightarrow x' = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i' \cdot u_i}_{\overset{(*)}{=} 0} + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot u_i' = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot u_i'$$

$$\Rightarrow x'' = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot u_i'' + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i' \cdot u_i'}_{\overset{(*)}{=} 0} = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot u_i''$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow x^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot u_i^{(n-1)}$$

$$\Rightarrow x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot u^{(n)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i' \cdot u^{(n-1)}}_{\overset{(*)}{=} f} = f + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i^{(n)}$$

Setze die Ableitungen von x in die inhomogene Gleichung ein:

$$x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x =$$

$$= f + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i^{(n)} + a_{n-1} \sum_{i=1}^{n} c_i u_i^{(n-1)} + \ldots + a_1 \sum_{i=1}^{n} c_i u_i' + a_0 \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$$

$$= f + \sum_{i=1}^{n} c_i \underbrace{\left(u_i^{(n)} + a_{n-1} u_i^{(n-1)} + \ldots + a_1 u_i' + a_0 u_i \right)}_{= 0} = f$$

u_i löst die homogene Gleichung

ulm university universität uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Jun.-Prof. PD Dr. Delio Mugnolo
delio.mugnolo@uni-ulm.de

Dr. Arthur Gerber
arthur.gerber@uni-ulm.de

Übungen - Gewöhnliche Differenzialgleichungen

keine Abgabe

21. Sei $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Die Matrix S_{ij} entsteht durch Streichen der $i-$ten Zeile und $j-$ten Spalte der Matrix A. Wir setzen die Zahl

$$A_{ij} := (-1)^{i+j} \det S_{ij}$$

und die Matrix

$$\operatorname{adj}(A) := \left((A_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}\right) .$$

Zeige:

(a) $(\det A) \cdot E = A \cdot \operatorname{adj}(A)^T \quad (E = E_n$ ist die Einheitsmatrix)

(b) Für $A \in C^1(I; M_n(\mathbb{R}))$ gilt die sogenannte *Jacobi-Formel*:

$$(\det A)'(t) = \sum_{i,j=1} a'_{ij}(t) \cdot A_{ij}(t) = \operatorname{Spur}(A'(t) \cdot adj(A)^T(t))$$

22. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A \in C^1(I; M_n(\mathbb{R}))$ und $\mathbf{u}^1, \ldots, \mathbf{u}^n$ Lösungen von

$$\mathbf{u}'(t) = A(t)\mathbf{u}(t) \quad t \in I .$$

(a) Zeige mit Hilfe der Jacobi-Formel und Aufgabe 21(a), dass die Wronski-Determinante $W(t)$ von $\mathbf{u}^1, \ldots, \mathbf{u}^n$ die gewöhnliche Differenzialgleichung

$$y'(t) = y(t)\operatorname{Spur}A(t)$$

erfüllt.

(b) Sind $\mathbf{u}^1, \ldots, \mathbf{u}^n$ linear unabhängige Lösungen, so gilt für beliebiges $t_0 \in I$:

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \operatorname{Spur}(A(s))\, ds\right)$$

23. (a) Bestimme die allgemeine Lösung von $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = e^t$.
(Hinweis: Errate zunächst Lösungen der assoziierten homogenen Gleichung.)

(b) Löse das Cauchy-Problem $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = e^t,\ \ y'(0) = y(0) = 0.$

Lösungsvorschläge zu den Aufgaben 21-23

21. (Wir stellen einige nützliche Hilfsmittel aus der linearen Algebra im Hinblick auf A22 bereit)

Einige (bekannte) Fakten:

(i) Laplacescher Entwicklungssatz: Für k, l beliebig gilt

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{il} \cdot A_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj}$$

(ii) $a_1, \dots, a_n$ seien die Zeilen der Matrix A; dann gilt

$$A_{ij} = \det(a_1, \dots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

Die Koeffizienten $a_{i1}, \dots, a_{in}$ kommen in A_{ij} nicht vor.

(a) Seien nun $a_1, \dots, a_n$ die Zeilen von A. Dann gilt:

$$\left(A \cdot \operatorname{adj}(A)^T\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \det(a_1, \dots, a_{j-1}, e_k, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

$$= \det(a_1, \dots, a_{j-1}, \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_k, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

$$= \det(a_1, \dots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

$$= \delta_{ij} \det A$$ (i ≠ j hat die Matrix immer zwei gleiche Zeilen)

(b) a_{ij} kommt in A_{ij} nicht vor, also folgt mit dem Entwicklungssatz:

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} \det A = \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj} \right) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} A_{kj} = A_{ij}$$

Mit der Kettenregel folgt:

$$(\det A)'(t) = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \det(A(t)) \cdot a_{ij}'(t) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}'(t) A_{ij}(t)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}'(t) \cdot (\operatorname{adj}(A(t)))_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} (A'(t))_{ij} (\operatorname{adj} A^T(t))_{ji}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(A'(t) \cdot \operatorname{adj} A^T(t) \right)_{ii} = \operatorname{Spur}\left(A'(t) \cdot \operatorname{adj} A^T(t) \right)$$

22.(a) Sei $W(t) = \det V(t)$ mit $V(t) = (u^1, \dots, u^n)$

$$W'(t) = (\det V)'(t) \overset{21.(b)}{=} \operatorname{Spur}\left(V'(t) \cdot \operatorname{adj} V^T(t) \right)$$

$$\overset{V' = A \cdot V}{=} \operatorname{Spur}\left((A(t) \cdot V(t)) \cdot \operatorname{adj} V^T(t) \right) = \operatorname{Spur}\left(A(t) \cdot (V(t) \cdot \operatorname{adj} A^T(t)) \right)$$

$$\overset{21(a)}{=} \operatorname{Spur}\left(A(t) \cdot \det V(t) \cdot E \right) = \det V(t) \cdot \operatorname{Spur}(A(t) \cdot E)$$

$$= W(t) \cdot \operatorname{Spur} A(t)$$

(b) $u^1, \dots, u^n$ l. u. $\Rightarrow W(t) \neq 0$ (und $V(t)$ invertierbar) $\forall t \in I$.

Es gilt: $(\ln W(t))' = \frac{W'(t)}{W(t)} \overset{(a)}{=} \operatorname{Spur} A(t)$

$$\overset{\text{integrieren}}{\Rightarrow} \int_{t_0}^{t} (\ln W(s))' \, ds = \int_{t_0}^{t} \operatorname{Spur} A(s) \, ds$$

$$\Rightarrow \quad \ln W(t) - \ln W(t_0) = \int_{t_0}^{t} \operatorname{Spur} A(s)\, ds$$

$$\overset{\exp}{\Rightarrow} \quad W(t) \cdot \frac{1}{W(t_0)} = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{Spur} A(s)\, ds\right)$$

23. (a) $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = e^t$ $\quad (*)$

Betrachte zunächst das homogene Problem:

$$y'' + y' - 2y = 0$$

Zwei Lösungen sind (geraten!): $y_1 = e^t$, $y_2 = e^{-2t}$

Ihre Wronski-Determinante lautet:

$$W(t) = \det\begin{pmatrix} e^t & e^{-2t} \\ e^t & -2e^{-2t} \end{pmatrix} = -2e^{-2t} \cdot e^t - e^t e^{-2t} = -3e^{-t} \neq 0$$

Also sind y_1, y_2 l.u.

Eine spezielle Lösung des inhomogenen Problems erhalten wir mit Satz 5.19 / Bsp 5.20:

$$\tilde{y}(t) = y_1(t) \cdot \int \frac{-y_2(t)\, e^t}{W(t)}\, dt + y_2(t) \int \frac{y_1(t)\, e^t}{W(t)}\, dt$$

$$= e^t \int -\tfrac{1}{3} e^t \left(-e^{-2t} \cdot e^t\right) dt + e^{-2t} \int -\tfrac{1}{3} e^t \left(e^t \cdot e^t\right) dt$$

$$= e^t \int +\tfrac{1}{3}\, dt + e^{-2t} \int -\tfrac{1}{3} e^{3t}\, dt = \tfrac{1}{3} t e^t - \tfrac{1}{9} e^t$$

$\Rightarrow \; y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \tilde{y}(t)$ ist die allgemeine Lösung von $(*)$

(b) AW: $y(0) = y'(0) = 0$ $\rightarrow$ müssen nur noch c_1 und c_2 aus (a) bestimmen:

$0 = y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^{-0} + \frac{1}{3} \cdot 0 e^0 - \frac{1}{9} e^0 = c_1 + c_2 - \frac{1}{9}$

$\Rightarrow c_1 + c_2 = \frac{1}{9}$ (I)

$\left(y'(t) = c_1 e^t - 2c_2 e^{-2t} + \frac{1}{3} t e^t + \frac{1}{3} e^t - \frac{1}{9} e^t \right)$

$0 = y'(0) = c_1 - 2c_2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} \Rightarrow c_1 - 2c_2 = -\frac{2}{9}$ (II)

(I)-(II) $\Rightarrow 3c_2 = \frac{3}{9} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{9} \overset{I}{\Rightarrow} c_1 = 0$

$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{9} e^{-2t} + \frac{1}{3} t e^t - \frac{1}{9} e^t = \frac{1}{9} e^t \left(e^{-3t} + 3t - 1 \right)$

löst das AWP (eindeutig!)