

Übungen zu Mathematik im Orientierungssemester

(24 Punkte entsprechen 100%, Abgabe spätestens am Mittwoch, den 17.05.2017 vor den Übungen)

1. Konvergieren folgende Folgen $(a_n)_{n=1}^\infty$? Begründen Sie Ihre Antwort und bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert.

(a) $a_n = \frac{(-1)^n (2n)^5}{(3n^2 + 4)^2}$.

(b) $a_n = \frac{n^3}{9^n}$.

(c) $a_n = \frac{n!}{n^n}$.

Hinweis: Eventuell ist es bei (b) hilfreich zu zeigen, dass $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3$ gilt.

(2 + 3 + 2 Punkte)

2. Begründen Sie, ob folgende Reihen konvergieren und geben Sie (sofern möglich) den Grenzwert an.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^{n-4n}}{8^n}$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^{n-4n}}{3^n}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^3 - (n+1)^3}{9^n}$.

Hinweis: Für die letzte Teilaufgabe ist eventuell Aufgabe 1(b) hilfreich.

(2 + 2 + 2 Punkte)

3. Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$ für die die folgenden Reihen konvergieren:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ für $x \geq 0$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^4 x}{(3n^2+4)^3}$.

Hinweis: Unterscheiden Sie bei (b) die Fälle $0 \leq x < 1$, $x = 1$ und $x > 1$.

(2 + 3 + 2 Punkte)

4. Es sei $a_k := \frac{k}{k^2+1}$ für $k \in \mathbb{N}$.

(a) Bestimmen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$.

(b) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^n a_k \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ gilt.

(c) Geben Sie eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ an, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{k+1}}{b_k} \right| = 1$ gilt und die Reihe konvergiert. Zeigen Sie, dass die Reihe die gewünschten Eigenschaften aufweist (für die Konvergenz kann auch auf die Vorlesung verwiesen werden).

(1 + 1 + 1 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

5. Zeigen Sie, dass $0,\overline{9} = 1$ gilt.

Hinweis: Es gilt $0,\overline{9} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k}$

(1 Punkte)

6. Mittels Gentechnik ist es den Biologinnen und Biologen gelungen, einen Goldesel zu züchten. Am Ende des ersten Jahres erzeugt er genau eine Feinunze Gold (das entspricht 31,1034768 Gramm). Der Esel lebt zwar ewig, aber leider verlieren seine Goldproduktionsorgane an Kraft, so dass er bei jeder weiteren Goldproduktion (jeweils nach einem Jahr) nur noch 95% der Menge des Vorjahres ausscheidet. Eine Sammlerin von Raritäten bietet einen Barren Gold (Gewicht 1kg) für den Esel. Sollten die Biologinnen und Biologen das Angebot annehmen?

Begründen Sie Ihre Antwort. Gehen Sie dabei auf folgende Aspekte ein: Ist die Gesamtmenge des produzierten Goldes endlich? Falls ja, wie groß wird sie maximal werden?

(2 Punkte)

Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.

<https://www.uni-ulm.de/?id=mios17>