Dr. M. Harder

17.05.2017
Blatt 04

Übungen zu Mathematik im Orientierungssemester

(24 Punkte entsprechen 100%, Abgabe spätestens am Mittwoch, den 24.05.2017 vor den Übungen)

1. Handelt es sich bei den folgenden Zuordnungen um Funktionen? Begründen Sie Ihre Antwort.
   (a) Jedem chemischen Element wird die Anzahl der Protonen in einem Atom zugeordnet.
   (b) Jeder Tierart wird die Anzahl der Chromosomen pro Zelle zugeordnet.

(1 + 1 Punkte)

2. Begründen Sie bei jeder der folgenden Funktionen, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv ist. Geben Sie im Falle der Bijektivität auch die Umkehrfunktion an.
   (a) $f\colon [2,\infty) \to [2,\infty)$ mit $f(x) = x^2 - 4x + 8$
   (b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 + 2x + 5$
   (c) $f\colon \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \left[\frac{2}{3}, 2\right]$ mit $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$.
   (d) $f\colon \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \to \left(-\frac{8}{3}, -2\right]$ mit $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$.

(3 + 3 + 3 + 3 Punkte)

3. Es seien $f\colon M_1 \to M_2$ und $g\colon M_2 \to M_3$ bijektiv. Zeigen Sie, dass dann auch $g \circ f$ bijektiv ist.

(3 Punkte)

4. Es seien $P, Q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynome mit

$$P(x) = 2x^5 + 3x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x - 3$$
$$Q(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 5$$

   für $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Zeigen Sie, dass $Q(1) = 0$ gilt und bestimmen Sie alle weiteren Nullstellen. Bestimmen Sie damit den maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ der gebrochen rationalen Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}$.
   (b) Bringen Sie die gebrochen rationale Funktion f aus der vorherigen Teilaufgabe mittels Polynomdivision auf die Form $f(x) = R(x) + \frac{\tilde{P}(x)}{Q(x)}$ mit einem Polynom R vom Grad 2 und einem Polynom $\tilde{P}$ vom Grad < 3.

(2 + 2 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

5. Es seien $a_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ sei ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Es seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass dann $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ sowie $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ gilt (Reihenfolge von Addition/Multiplikation und komplexer Konjugation kann vertauscht werden).

   (b) Folgern Sie aus der vorherigen Teilaufgabe, dass aus $P(z) = 0$ für ein $z \in \mathbb{C}$ bereits $P(\overline{z}) = 0$ folgt.

(2 + 1 Punkte)

Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.