Dr. M. Harder

24.05.2017
Blatt 05

Übungen zu Mathematik im Orientierungssemester

(24 Punkte entsprechen 100%, Abgabe spätestens am Mittwoch, den 31.05.2017 vor den Übungen)

1. Verwenden Sie die Ergebnisse der Vorlesung (insbesondere Satz 3.14) um die folgenden Additionstheoreme für alle $x, y \in \mathbb{R}$ zu zeigen:

   (a) $\sin(x) \pm \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x \pm y}{2}\right)\cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right)$.

   (b) $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big)$.

   Hinweis: Dass $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, darf ohne Beweis verwendet werden.

   (2 + 2 Punkte)

2. Bestimmen Sie für jede der folgenden Gleichungen die maximale Lösungsmenge (wobei $x \in \mathbb{R}$):

   (a) $\log_2(x) + \log_4\big(1 - \frac{9}{x}\big) = 2$

   (b) $\log_x(2x^2 - x) = 3$

   (c) $9^x - 3^x = 3^{x+1} + 5$

   (2 + 2 + 2 Punkte)

3. Es seien die folgenden komplexen Zahlen gegeben:

   $$z_1 := 1 + i\sqrt{3}, \quad z_2 := \frac{3}{4}\,\mathrm{e}^{\frac{4}{3}\pi i}.$$

   (a) Bestimmen Sie $r \geq 0$ und $\varphi \in (-\pi, \pi]$ mit $z_1 = r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$.

   (b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^5 = z_1$ und skizzieren Sie die Lösungen in der komplexen Ebene.

   (c) Bestimmen Sie $\mathrm{Re}\big(z_2^{-1}\big)$ und $\mathrm{Im}\big(z_2^{-1}\big)$.

   (2 + 2 + 2 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

4. Wie in der Vorlesung besprochen, geht bei Prozessen mit „stetiger“ Verzinsung (oder Wachstum oder Zerfall, etwa durch große Mengen des betrachteten Stoffes oder Organismen) die Formel des diskreten Wachstums $K(n) = K_0\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ mit Zinssatz x über in die Formel des stetigen Wachstums $K(t) = K_0 \exp(\lambda t)$ mit der Wachstumskonstante λ. Jeweils ist K_0 die Ausgangsmenge (oder das Startguthaben, etc.), $K(n)$ ist die Menge nach n Verzinsungen und $K(t)$ bezeichnet die Menge zum Zeitpunkt t.

   Entscheiden Sie sich jeweils für ein passendes Modell und bestimmen Sie die gesuchten Größen.

   (a) Unter optimalen Bedingungen verdoppelt sich Backhefe alle zwei Stunden. Nach welcher Zeit hat sich die Menge von 10g verzehnfacht? Wie lange dauert es, bis aus 500g Hefe 5kg geworden sind?

   (b) Die Wasserfläche, die durch eine Seerosenart bedeckt wird, verdoppelt sich jedes Jahr. Wenn 2016 im Bodensee 1m^2 dieser Seerosenart vorkommt, in welchem Jahr wird die Fläche des Bodensees (536km^2) komplett mit Seerosen bedeckt sein? Wann wird der Bodensee zur Hälfte bedeckt sein?

   (c) Das Bakterium Escherichia coli besitzt eine Generationszeit (Zeit bis zur Verdoppelung) von 20 Minuten. Wie groß ist die Wachstumskonstante bei stetigem Wachstum? Als grundlegende Zeiteinheit soll eine Stunde verwendet werden.

   (d) Zu welchem Zinssatz muss man sein Geld anlegen, damit sich der Betrag nach 10 Jahren gerade verdoppelt hat?

   (e) Die Einlagen der Banken bei der EZB unterliegen derzeit einem negativen Zins von 0,4% pro Jahr. Wie lange dauert es bei jährlicher Verzinsung, bis bei einer Einlage von 100 € mindestens ein Euro bezahlt wurde? Nach welchem Zeitraum ist mehr als die Hälfte der Einlage verschwunden? Und wann wird der Gesamtbetrag durch die Negativzinsen aufgebraucht sein?

   (f) Mit der Radiokarbonmethode können archäologische Funde organischer Materialien datiert werden. Sie beruht auf dem Zerfall des natürlich vorkommenden Kohlenstoffisotops ^{14}C, dessen Halbwertszeit 5 730 Jahre beträgt. Das Papier eines Buches über Logarithmen von John Napier enthält 95,25343% des Anteils an ^{14}C in frischem Papier. Wann wurde das Buch wohl veröffentlicht?

$(1 + 2 + 1 + 1 + 2 + 2$ Punkte$)$

Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.